Tutorium zur G2 (Sirker) - SS13
Mathematischer Notfallkoffer 1: Differentialoperatoren und Integration in allgemeinen, krummlinig-orthogonalen Korrdinatensystemen

Andreas Schulz

18. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Bevor es losgeht ...

Es gibt kein Skript zum Tutorium!

Nochmal, da es trotz mehrfacher Klarstellung immer wieder Verwirrung in diesem Punkt gibt:

1. ES GIBT KEIN SKRIPT ZUM TUTORIUM!
   Bitte beachten Sie dass Wörtchen 'kein': Es klingt zwar fast genauso wie 'ein', bedeutet aber hier dass genaue Gegenteil. Und bevor Sie fragen:

2. Es WIRD auch keins geben ...

Was ist denn dass hier?

Wenn dass kein Skript ist ... Was ist denn dass hier dann? Sieht aber fast wie ein Skript aus ... ?

- Ja, Ich weiss, ich hab's geschrieben (Seufz ...).

- Eine Art "mathematischer Notfallkoffer" zur einem Teil der Elektrodynamik. Den Inhalt dieses "Nicht-Skripts" finden Sie auch in mehreren exzellenten Lehrbüchern (s.u.), allerdings möglicherweise verteilt über 150 Seiten unter noch viel mehr nützlichem Zeugs ...

- Das Ziel ist ausdrücklich *nicht*, diese Lehrbücher oder ihre einschlägigen Vorlesungen zu ersetzen, sondern ihnen in möglichst kompakter und abgeschlossener Form einige wichtige Werkzeuge nochmal darzustellen - in etwa wie ein (ziemlich aufgeblähter) Spickzettel, den Sie neben ihren Übungszettel legen können.

Spickzettel zu diff. Operatoren

Seiten 10-12 sind wirklich als "Spickzettel" bzw. Zusammenfassung für den ersten Teil gemeint. Kann man sich ausdrucken & neben die Vorlesung tun.

Literatur

- Nolting: "Grundkurs theoretische Physik 1: klassische Mechanik" - Seite 1-155 sind eine Art 'mathematischer Vorkurs'

- Nolting: Elektrodynamik

- Greiner: Reihe "Theoretische Physik". Genausogut wie Nolting. Ist Geschmackssache.

- Nützliche Relationen stehen am Anfang vom NRL-Plasma formulary (`wwwppd.nrl.navy.mil/nrlformulary/NRL_FORMULARY_02.pdf`).

Fehlerteufel - 'Herr Schulz, sollte in Gleichung XYZ nicht ...'

Der Teufel steckt, wie allgemein bekannt, im Detail. Bei fast 27 Seiten gibt eine Menge Details, um sich zu verstecken. Und da dies die erste Version ist, wird sich der ein oder andere Tippfehler eingeschlichen haben. Bitte schicken Sie mir dann einfach schnell eine Mail an `schulz@physik.uni-kl.de` mit Kapitelnummer, Nummer der nächstenliegenden Gleichung & Satzanfang (z.B. "Kapitel 2 -lokal orthogonale Koordinatensysteme, unter Gl. (1), nach 'Der Vektor ...' steht was falsches, nämlich "). Bitte nicht einfach nur Seitenzahl eingeben, denn die wird sich ändern, wenn das (Nicht-)Skript überarbeitet wird.

Ich kapier' dass nicht ...

Fragen an o.g. Mailaddresse. Oder auf gut Glück im Büro vorbeikommen (Nicht bös' sein, wenn ich mal keine Zeit hab' - Ich muss auch noch forschen ...).

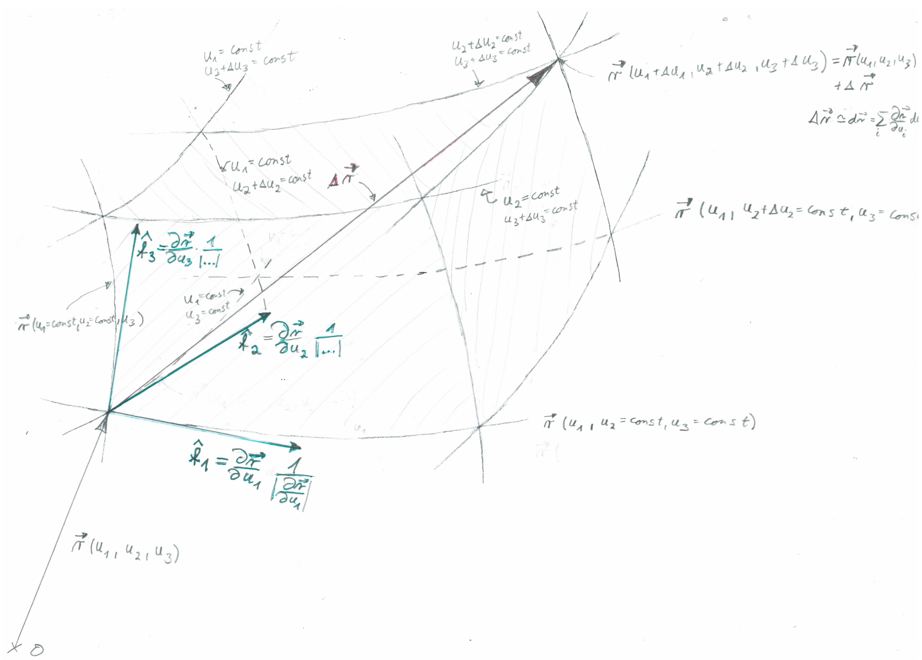

Abbildung 2.1: Krummlinig-orthogonales KS, Richtungsableitungen & Basisvektoren.

2 Lokal- orthogonale Koordinatesysteme

Wir betrachten ein allgemeines, krummlinig-orthogonales KS (siehe Abb. 2.1):

$$\begin{aligned}
\triangle\vec{r} &= \vec{r}\,(u_1+\triangle u_1,\, u_2+\triangle u_2,\, u_3+\triangle u_3) - \vec{r}\,(u_1,\, u_2,\, u_3) \\
&\simeq \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\, du_i \\
&:= d\vec{r}
\end{aligned}$$

Differentielles Wegelement

$$d\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\, du_i \tag{2.1}$$

Der Vektor $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_1}$ ist tangential zur Koordinatenlinie $\vec{r}\,(u_1, u_2 = const,\, u_3 = const)$ im Punkt $\vec{r}$, und ist orthogonal zu den anderen Richtungsableitungen

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_j} = \delta_{ij}\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right|\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_j}\right|,$$

ist aber nicht auf Eins normiert! Daher definieren wir Einheitsvektoren $\hat{f}_i$ und Skalenfaktoren h_i:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} &= h_i \, \hat{f}_i \, (u_1, \, u_2, \, u_2) \, , \\
h_i &\equiv \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \right| = \sqrt{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}} . \qquad (2.2)
\end{aligned}
$$

Für diese neuen Einheitsvektoren gilt *lokal* nach wie vor, dass sie paarweise orthogonal und orientiert[1] sind:

$$
\begin{aligned}
\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j &= \delta_{ij} \\
\vec{f}_i \times \vec{f}_j &= \sum_k \epsilon_{ijk} \, \vec{f}_k \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Merke: Im Gegensatz zur kartesischen Darstellung gilt das obige nur *lokal* (im selben Punkt), d.h. $\vec{f}_i \, (u_1, u_2, u_3) \cdot \vec{f}_j \, (u_1, u_2, u_3) = \delta_{ij}$, aber i.a. $\vec{f}_i \, (u_1, u_2, u_3) \cdot \vec{f}_j \, (v_1, v_2, v_3) \neq \delta_{ij}$ für $u_i \neq v_i$ (ebenso für das Kreuzprodukt)! Denn diese Basisvektoren hängen nun auch von den neuen Koordinaten ab (anders als im kartesischen System)

$$
\hat{f}_i = \hat{f}_i \, (u_1, \, u_2, \, u_2) \, , \qquad (2.4)
$$

und können daher u.a. auch nicht vor die Ableitungen gezogen werden können $\frac{\partial}{\partial u_i} \left(\hat{f}_j \, g \, (u_1, u_2, u_3) \right) \neq \hat{f}_j \, \frac{\partial}{\partial u_i} \, (g \, (u_1, u_2, u_3))$!

Notation

- Um Verwechselungen zu vermeiden, schreiben wir die Einheitsvektoren im *krummlinig-orthogonal* K.S. daher vorläufig[2] (!) als $\vec{f}_i \, (\vec{r})$, und diejenigen im kartesischen System als $\hat{e}_i$.
- Wir benutzen $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ in kartesischen und $\partial_j = \frac{\partial}{\partial u_j}$ in krummlinig-orth. Koordinaten.

[1] Also $\vec{f}_1 \times \vec{f}_2 = \vec{f}_3$ und $\vec{f}_2 \times \vec{f}_3 = \vec{f}_1$ usw. aber $\vec{f}_2 \times \vec{f}_1 = -\vec{f}_3$ (Vorzeichen ändert sich, wenn man "Händigkeit" ändert).

[2] Dass heisst: Normalerweise schreibt man die auch als $\hat{e}_i$. Wenn Sie "im Hinterkopf" haben, dass diese Biester nur lokal gelten, und abhängig von den Ortskoordinaten sind, dann dürfen Sie die wieder als $\hat{e}_i$ schreiben!

2.1 Math. Hilfsmittel: Antisymmetrischer Tensor: Kreuzprodukt, Spatprodukt, Determinante

Zur komponentenweisen Darstellung von antisymmetrischen Grössen wie Determinanten, Kreuzprodukten etc. wird oft der *Levi-Civita-Tensor*, oder "total antisymmetrischer Tensor $n-$ter Stufe $\epsilon_{i_1,i_1,...,i_n}$" verwandt. Am häufigsten begegnet man demjenigen 3-ter Stufe[3]

$$\epsilon_{ijk} \quad = \quad \begin{cases} 1 & (i\,j\,k)\ gerade\,Permut.\,von\ (1,2,3) \\ -1 & (i\,j\,k)\ ungerade.\,Permut.\,von\ (1,2,3) \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{2.5}$$

(Un-)gerade Permutationen entstehen immer durch eine *(un-)gerade* Anzahl von Vertauschungen ('Transpositionen') zweier Indices. Gerade Permutation heisst: $(1,2,3) \to (3,1,2) \to (2,3,1)$ ($\to (1,2,3) \to ...$) ("Nach rechts (links) schieben, letztes (erstes) Element an erste (letzte) Stelle").

Ungerade Permutationen sind dementsprechend: $(1,2,3) \to (1,3,2) \to (2,1,3) \to$ ....

Zuguterletzt ist der ϵ-Tensor gleich Null wenn zwei Indices identisch sind, z.B. $\epsilon_{iik} = 0$.[4]

Beispiel: Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt (Gute Darstellung, mehr Relationen etc. in "Nolting: Grundkurs theoretische Physik 1", Seite 62ff) kann mittels des ϵ-Tensors geschrieben werden:

$$\vec{A} \times \vec{B} \quad = \quad \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\,\vec{e}_k A_i B_j$$

Oft kann man Gleichungen vereinfachen, indem man die zylische Invarianz des Tensors ausnutzt, z.B.

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\,\hat{e}_k A_i B_j \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{kij}\,\hat{e}_k A_i B_j \\ &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\,\hat{e}_i A_j B_k \end{aligned} \tag{2.6}$$

(zeigen durch zykl. invarianz des ϵ-tensors und umschreiben der Indices $k \leftrightarrow i$, $i \leftrightarrow j$, $j \leftrightarrow k$ in der letzten Zeile).

[3] Generalisierung auf $n-$te Stufe entsprechend.

[4] Diese algebraische Struktur findet sich überall in der Mathematik, z.B. ändert die Determinante ihr Vorzeichen beim Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten und verschwindet, wenn zwei Zeilen gleich sind, dass differentielle Oberflächenelement wird aus dem Kreuzprodukt zweier Richtungsableitungen zusammengesetzt (cf. Cartan-Kalkül/ äussere Ableitung, "Hut-produkt") etc.pp.

Für dass Kreuzprodukt gilt u.a. die BAC-CAB Regel

$$\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C} \;=\; \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right),$$

Beispiel: Spatprodukt, Determinante

Ebenfalls wichtig ist das 'SPATPRODUKT' (Nolting Seite 67ff):

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \;=\; \sum_{ijk} \epsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, c_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \tag{2.7}$$

welches mit dem ϵ-Tensor oder äquivalent als Determinante geschrieben werden kann. Das Spatprodukt ist 'zyklisch invariant'

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \;=\; \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}).$$

Anwendung: Komponentenschreibweise

Viele Relationen sind sehr viel einfacher in Komponentenschreibweise herzuleiten, z.B.

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (f\,\vec{u}) &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j\,(f\,u_k) \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i\,(\partial_j f)\;u_k + f \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j\,u_k \\
&= \vec{u} \times \vec{\nabla} f + f\,\vec{\nabla} \times \vec{u}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot (f\,\vec{u}) &= \sum_i \partial_i\,(f\,u_i) \\
&= \sum_i u_i \partial_i f + f \sum_i \partial_i\,u_i \\
&= \vec{u} \cdot \vec{\nabla} f + f\,\vec{\nabla} \cdot \vec{u}
\end{aligned}$$

Die Permutationseigenschaften von ϵ nutzt man aus, um leicht zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} &= \sum_{ijk} \partial_i \left(\vec{\nabla} \times \vec{u}\right)_i \\
&= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j u_k \\
&= \sum_{ijk} (-\epsilon_{jik})\,\partial_j \partial_i u_k \\
&\overset{(i\leftrightarrow j)}{=} -\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j u_k \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{u} &= 0
\end{aligned}$$

Zweite Zeile wg. $f \in C^2 \Rightarrow \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ und Gl. (2.5) $\Rightarrow \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$. In dritter Zeile haben wir nur die Indices umbenannt. Genauso

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f &= \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j \partial_k f \\
&= \sum_{ijk} -\epsilon_{ikj} \hat{e}_i \partial_k \partial_j f \\
&\overset{(j \leftrightarrow k)}{=} -\sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j \partial_k f \\
\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f &= 0
\end{aligned}$$

2.2 Beispiele: Die am häufigsten verwendeten krummlinig-orthogonalen K.S.

Es gibt zwar noch eine Menge lokal-orthogonale KS mehr (elliptische etc.), aber diese zwei brauchen Sie unbedingt.

2.2.1 Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten schreibt man den Ortsvektor als:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho \cos\varphi \\ \rho \sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Durch die Ableitungen nach ρ, φ, z erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \rho \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \\
\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und daraus die Koeffizienten $h_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right| = \sqrt{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}$:

$$\begin{aligned}
h_\rho = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| &= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1 \\
h_\varphi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| &= \sqrt{\rho^2\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right)} = \rho \\
h_z = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right| &= 1
\end{aligned}$$

und die Einheitsvektoren $\hat{f}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$ sind entsprechend

$$\vec{f}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{f}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Kugelkoordinaten

In Kugelkoordinaten ist der Ortsvektor:

$$\vec{r} \quad = \quad \begin{pmatrix} r\,\sin\theta\,\cos\varphi \\ r\,\sin\theta\,\sin\varphi \\ r\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

Richtungsabbleitung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} &= \vec{f}_r h_r &&= \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} &= h_\theta \hat{f}_\theta &&= r \begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos\varphi \\ \cos\theta\,\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \\
\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} &= h_\varphi \hat{f}_\varphi &&= r\,\sin\theta \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Daraus erhält man die Einheitsvektoren $f_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}$ als

$$\vec{f}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\,\cos\varphi \\ \sin\theta\,\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \hat{f}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\,\cos\varphi \\ \cos\theta\,\sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \hat{f}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Koeffizienten (wieder mit $\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) = 1$ für $x = \theta, \varphi$)

$$\begin{aligned}
h_r &= 1 \\
h_\theta &= r \\
h_\varphi &= r\,\sin\theta
\end{aligned}$$

3 Differentialoperatoren in krummlinigen KS

Wir leiten im folgenden die Darstellung von Gradient, Rotation und Laplace-Operator in krumlinig-orthogonalen Koordinatensystemen her (ϕ skalare Funktion, $\vec{A}$ Vektorfeld) . Mit Hilfe dieser allgemeinen, auch leichter zu merkenden Relationen für GRADIENT

$$\vec{\nabla}\phi \quad = \quad \sum_i \frac{1}{h_i}\frac{\partial \phi}{\partial u_i}\,\vec{f}_i, \tag{3.1}$$

ROTATION

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\times\vec{A} \quad &= \quad \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{f}_1 & h_2\vec{f}_2 & h_3\vec{f}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix} \qquad (3.2)\\
&= \quad \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{h_1\vec{f}_1\left[\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(h_2A_2)\right] + \text{"}123 \to 231\text{"} + \text{"}123 \to 312\text{"}\right\},
\end{aligned}$$

DIVERGENZ

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \quad &= \quad \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_j \frac{\partial}{\partial u_j}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_j}\,A_j\right), \qquad (3.3)\\
&= \quad \frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(A_1h_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(h_1A_2h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right\}
\end{aligned}$$

und LAPLACE-OPERATOR

$$\triangle\phi \quad = \quad \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\sum_i \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial \phi}{\partial u_i}\right)\right], \tag{3.4}$$

kann man nun die Darstellung in einem speziellen Koordinatensystem (K.S.) aus den Einheitsvektoren

$$\vec{f}_i \quad = \quad \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right|}\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}$$

und Massstabsfactoren h_i

$$h_i \quad \equiv \quad \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\right| = \sqrt{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}\cdot\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i}}.$$

bestimmen. Beides ist einfach aus der Darstellung des Ortsvektors $\vec{r} = \vec{r}\,(u_1, u_2, u_3)$ im neuen K.S. herzuleiten, vergl. Abschnitt 2 und Abschnitt 2.2.

Wichtig ist zu erinnern, dass anders als im kartesischen System, die Einheitsvektoren im neuen K.S. im allgemeinen *auch* von den neuen Koordinaten abhängen $\hat{f}_i = \hat{f}_i\,(u_1, u_2, u_3)$ und daher NICHT mit Differentialoperatoren vertauschen!

Man beachte hierzu auch die sehr nützlichen Relationen im Abschnitt 3.5, mit deren Hilfe sich die Herleitung von Rotation, Divergenz & Laplace-Operator vereinfacht zu “Produktregel, Gradient einsetzen, umformen”.

3.1 Gradient

Der Gradient im neuen K.S. kann formal geschrieben werden als:

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_i \left(\vec{\nabla}\phi\right)_i \vec{f}_i(\vec{r}),$$

wobei seine Koordinate$\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i$ durch die Projektion von $\vec{\nabla}\phi$ auf den Einheitsvektor $\hat{f}_i$ gegeben ist

$$\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i = \hat{f}_i \cdot \vec{\nabla}\phi.$$

In der kartesischen Basis gilt natürlich $\vec{\nabla}\phi = \sum_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\vec{e}_j$ und daher

$$\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i = \sum_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\vec{e}_j \cdot \vec{f}_i,$$

Um das Produkt $\vec{e}_j \cdot \vec{f}_i$ auszuwerten, verwenden wir Gl. (2.2) und setzen den Ortsvektor in der *kartesischen* Basis $\vec{r} = \sum_k \vec{e}_k x_k$ ein[5]:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_j \cdot \vec{f}_i &= \vec{e}_j \cdot \left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u_i}\right) \\
&= \vec{e}_j \cdot \left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial}{\partial u_i}\sum_k \vec{e}_k x_k\right) \\
&= \sum_k \vec{e}_j \cdot \vec{e}_k \left(\frac{1}{h_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\right) \\
&= \frac{1}{h_i}\frac{\partial x_j}{\partial u_i}.
\end{aligned}$$

Letzte Zeile wg. Gl. (2.3). Insgesamt:

$$\begin{aligned}
\left(\vec{\nabla}\phi\right)_i &= \frac{1}{h_i}\sum_j \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial u_i} \\
&= \frac{1}{h_i}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Kettenregel für die Funktion $\phi = \phi\left(x_1\left(u_1, u_2, u_3\right), x_2\left(u_1, u_2, u_3\right), ...\right)$ benutzt wurde. In allgemeinen, krummlinig-orthogonalen Koordinaten lautet die Darstellung des Gradienten also:

$$\vec{\nabla} = \sum_i \frac{1}{h_i}\vec{f}_i\frac{\partial}{\partial u_i} \qquad (3.5)$$

[5]Wir dürfen die *kartesischen* Einheitsvektoren $\vec{e}_j$ vor die Ableitung $\frac{\partial}{\partial u_i}$ ziehen, da diese nicht von u_i abhängen!

3.1.1 Anwendung: Gradient in Zylinderkoordinaten

Wir benutzen $h_\rho = 1$, $h_\varphi = \rho$ und $h_z = 1$ und

$$\vec{f}_\rho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{f}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{f}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in Eq. (3.5)

$$\vec{\nabla} \quad = \quad \vec{f}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \vec{f}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{f}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

3.1.2 Anwendung: Gradient in Kugelkoordinaten

Wir benutzen $h_r = 1$, $h_\theta = r$ und $h_\varphi = r \sin\theta$ und

$$\vec{f}_r = \begin{pmatrix} \sin\theta\, \cos\varphi \\ \sin\theta\, \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \hat{f}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta\, \cos\varphi \\ \cos\theta\, \sin\varphi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \qquad \hat{f}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

in Eq. (3.5)

$$\vec{\nabla} \quad = \quad \vec{f}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{f}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \vec{f}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

3.2 Rotation

Sei $\vec{A} = \sum_j A_j \; \vec{f}_i$ ein Vektorfeld. $A_j = \vec{A} \cdot \vec{f}_i$ sind die Koordinaten in dem neuen KS. Wir benutzen eine der Produktregeln für die Rotation (Siehe Übungszettel 1, Aufg.1.iv. Oder das NRL formulary. Oder eben selber herleiten)

$$\vec{\nabla} \times \left(f \, \vec{B}\right) \;\; = \;\; \vec{B} \times \left(\vec{\nabla} f\right) + f \, \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right), \tag{3.6}$$

um die Rotation von $\vec{A}$ als:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} \;\; &= \;\; \vec{\nabla} \times \left(\sum_j h_j A_j \, \frac{\vec{f}_j}{h_j} \right) \\
&= \;\; \sum_j \left\{ \frac{\vec{f}_j}{h_j} \times \left(\vec{\nabla} \left(h_j A_j \right) \right) + h_j A_j \underbrace{\left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{f}_j}{h_j} \right)}_{= \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_j = 0} \right\}
\end{aligned}$$

zu schreiben, wobei wir in der letzten Zeile die Hilfsrelationen Gl.(3.9) bzw. Gl.(3.10) (siehe Abschnitt 3.5) verwandt haben. Schreibt man den Gradienten im verbleibenden Term wieder explizit nach Gl.(3.5) aus, folgt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} \;\; &= \;\; \sum_j \frac{\vec{f}_j}{h_j} \times \left(\sum_i \frac{\vec{f}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_j A_j \right) \right) \\
&= \;\; \sum_{ij} \frac{1}{h_i h_j} \, \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_j A_j \right) \left(\vec{f}_j \times \vec{f}_i \right) \\
&= \;\; \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \, \frac{1}{h_i h_j} \, \frac{\partial}{\partial u_i} \left(h_j A_j \right) \vec{f}_k \\
&= \;\; \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \, \frac{\vec{f}_i}{h_j h_k} \, \frac{\partial}{\partial u_j} \left(h_k A_k \right)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

In der zweiten Zeile haben wir Gl. 2.3, und in der letzten Zeile Gl. 2.6 verwandt. Mit der Darstellung Gl. 2.7 erhält man die folgende, leicht zu merkende Form:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{A} \;\; &= \;\; \begin{vmatrix} \frac{\vec{f}_1}{h_2 h_3} & \frac{\vec{f}_2}{h_1 h_3} & \frac{\vec{f}_3}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_{3j}} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \\
&= \;\; \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{f}_1 & h_2 \vec{f}_2 & h_3 \vec{f}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \\
&= \;\; \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ h_1 \vec{f}_1 \left[\frac{\partial}{\partial u_2} \left(h_3 A_3 \right) - \frac{\partial}{\partial u_3} \left(h_2 A_2 \right) \right] + \text{"}123 \to 231\text{"} + \text{"}123 \to 312\text{"} \right\}
\end{aligned}$$

3.3 Divergenz

Definiere $p_i \equiv \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i}$ und erweitere analog zur Herleitung der Rotation[6]:

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_j A_j \, \vec{f}_j \right) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\sum_j p_j A_j \, \frac{\vec{f}_j}{p_j} \right) \\
&= \sum_j \left\{ \frac{\vec{f}_j}{p_j} \cdot \vec{\nabla} \left(p_j \, A_j \right) + p_j \, A_j \, \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{f}_j}{p_j} \right) \right\}
\end{aligned}
$$

Der zweite Term verschwindet wg. $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{f}_k}{p_k} \right) = 0$ (siehe Gl. 3.11). Wir benutzen nun wieder die explizite Form des Gradienten Gl. (3.5)

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \sum_j \left\{ \frac{\vec{f}_j}{p_j} \cdot \left(\sum_i \vec{f}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial}{\partial u_i} \right) \left(p_j \, A_j \right) \right\} \\
&= \sum_j \frac{1}{p_j} \cdot \frac{1}{h_j} \frac{\partial}{\partial u_j} \left(p_j \, A_j \right) \\
&= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_j \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{h_1 h_2 h_3}{h_j} \, A_j \right) \qquad (3.8)
\end{aligned}
$$

wobei wir in der zweiten Zeile $\vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = \delta_{ij}$ verwandt haben.

[6] Benutze $\vec{\nabla} \cdot \left(f \, \vec{B} \right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{\nabla} f \right) + f \, \left(\vec{\nabla} \cdot \, \vec{B} \right)$.

3.4 Laplace-Operator

Der Laplace-Operator folgt nun mit $\triangle = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ aus Gl.(3.8) und Gl.(3.5):

$$\begin{aligned}\triangle\phi &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_j \frac{\partial}{\partial u_j} \left(p_j \, \frac{1}{h_j} \frac{\partial \phi}{\partial u_j} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial u_1} \right) + zykl. \right)\end{aligned}$$

Damit ist es nun einfach, z.B. den Laplace-Operator in Kugelkoordinaten zu bestimmen

$$\begin{aligned}\triangle\phi &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 \sin\theta}{1} \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{r^2 \sin\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{r^2 \sin\theta}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \phi \right) \right) \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \phi \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \phi\end{aligned}$$

3.5 Hilfsrelationen

Wir benutzen die soeben hergeleitete Darstellung des Gradienten nun, um zwei wichtige Hilfsformeln herzuleiten, welche wir benutzen, um Divergenz & Rotation von Einheitsvektoren $\vec{f}_k$ zu bestimmen:

$$\vec{\nabla} u_j = \sum_i \frac{\vec{f}_j}{h_i} \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial u_i}}_{=\delta_{ij}} = \frac{\vec{f}_j}{h_j} \tag{3.9}$$

Mit $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$ folgt

$$\left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{f}_j}{h_j} \right) = \left(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_j \right) = 0 \tag{3.10}$$

Aus Gl. (3.9) erhält man eine ähnliche Hilfsgrösse

$$\vec{\nabla} \times \left(u_1 \, \vec{\nabla} u_2 \right) = \left(\vec{\nabla} u_1 \right) \times \left(\vec{\nabla} u_2 \right) + u_1 \left(\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} u_2}_{=0} \right) = \frac{\vec{f}_1}{h_1} \times \frac{\vec{f}_2}{h_2} = \frac{\vec{f}_3}{h_1 h_2}$$

wobei wir $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$ und Gl.(2.3) benutzt haben[7]. Mittels $\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right) = 0$ folgt dann:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{h_k \, \vec{f}_k}{h_1 h_2 h_3} \right) = 0. \tag{3.11}$$

[7]Genauso gilt auch $\frac{\vec{f}_2}{h_1 h_3} = \vec{\nabla} \times \left(u_3 \, \vec{\nabla} u_1 \right)$ und $\frac{\vec{f}_1}{h_2 h_3} = \vec{\nabla} \times \left(u_2 \, \vec{\nabla} u_3 \right)$