Quantenmechanik II

Übungsblatt 9: Anwendung der Dirac-Gleichung

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

Fällig: Montag 16. Januar, 13:00 Uhr

1. **Diracs Gleichung im sphärischen Potentialtopf** (30 Punkte)
   Hier lösen wir die stationäre Dirac-Gleichung

$$[\boldsymbol{\vec{\alpha}}.\vec{p} + \boldsymbol{\beta} mc^2]\psi(\mathbf{r}) = [E - V(r)]\psi(\mathbf{r})$$

für die gebundenen Zustände im Potential

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{für} \quad r \leq R \\ 0 & \text{für} \quad (r > R). \end{cases}$$

a) Beweisen Sie zuerst die folgenden Relationen

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{\hbar}\frac{\vec{e}_r}{r} \times \vec{L}$$

und

$$\boldsymbol{\vec{\alpha}}.\vec{p} = -i\boldsymbol{\alpha}_r \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hbar}{r} - \frac{\boldsymbol{\beta}}{r}\boldsymbol{K} \right)$$

wobei $\boldsymbol{K} \equiv \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\vec{\Sigma}}.\vec{L} + \hbar)$ und $\boldsymbol{\vec{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\vec{\sigma}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\vec{\sigma}} \end{pmatrix}$.

b) Wir fügen nun den Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und den Spin $\vec{S}$ gemäß der Drehimpulsaddition zu einem Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ zusammen. Alle drei Drehimpulse sind durch die üblichen beiden Quantenzahlen (Absolutwert und Komponente in z-Richtung) charakterisiert. Dies führt uns in Ortsdarstellung auf die Spinor-Kugelfunktionen

$$\chi_{jlm}(\theta, \phi) = \sum_{\mu=\pm\frac{1}{2}} \underbrace{C(l\,\tfrac{1}{2}\,j|m-\mu, \mu, m)}_{\text{Clebsch-Gordon Koeffizienten}} \; Y_{l,m-\mu}(\theta,\phi)\chi_\mu,$$

für den Winkelanteil mit den Spinoren

$$\chi_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ und } \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Clebsch-Gordon Koeffizienten sind in der Tabelle am Ende der Aufgabe angegeben. Beweisen Sie

$$(\boldsymbol{\vec{\sigma}}.\vec{L} + \hbar)\chi_{jlm}(\theta,\phi) = \mp\hbar\lambda\chi_{jlm}(\theta,\phi).$$

Was ist λ? Wann tritt das Plus- und wann das Minus-Vorzeichen auf?

c) Mit dem Ansatz

$$\psi(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} g(r)\chi_{jlm}(\theta,\phi) \\ if(r)\chi_{jl'm}(\theta,\phi) \end{pmatrix}$$

finden Sie zwei gekoppelte Gleichungen für $g(r)$ und $f(r)$. (Wir benutzen hier $l = j + \frac{1}{2}$ und $l' = j - \frac{1}{2}$.)

d) Nutzen Sie den Ansatz $u_1(r) = rg(r)$ und $u_2(r) = rf(r)$, um die Lösungen für die Fälle $(E-V_0)^2 - m^2c^4 > 0$ und $(E-V_0)^2 - m^2c^4 < 0$ zu untersuchen.
Hinweis: Hierbei treten Besselfunktionen auf; erinnern Sie sich an Übungsblatt 2!

e) Nun betrachten wir nur gebundene Zustände mit $E > V_0 + mc^2$ und $-mc^2 < E < mc^2$. Benutzen Sie die Randbedingungen bei $r = 0$, $r = \infty$ und $r = R$, um die Gleichungen für die Koeffizienten zu bestimmen.

$C(l\,\frac{1}{2}\,j\vert m-\mu,\mu,m)$	$\mu = \frac{1}{2}$	$\mu = -\frac{1}{2}$
$j = l + \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$
$j = l - \frac{1}{2}$	$-\sqrt{\frac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$	$\sqrt{\frac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}$

Table 1: Die Clebsch-Gordon Koeffizienten