Theoretische Elektrodynamik

Übungsblatt 9: Induktion, Ladungsdichten und magnetische Monopole

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 25. Juni, 16:00 Uhr

1. **Levi-Civita Symbol** (6 Punkte)

   Viele Rechnungen zu Vektoridentitäten lassen sich durch Verwendung des Levi-Civita Symbols ϵ_{ijk} vereinfachen. In drei Dimensionen gilt $\epsilon_{ijk} = +1$ für $(ijk) = (123)$ und gerade Permutation, $\epsilon_{ijk} = -1$ für ungerade Permutationen und $\epsilon_{ijk} = 0$ falls sich ein Index wiederholt. Das Kreuzprodukt läßt sich z.B. als
   $$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$$
   schreiben.

   Beweisen Sie die folgenden nützlichen Identitäten:

   i) $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$

   ii) $\sum_{i,j} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$

   iii) $\sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk} = 6$

2. **Leiterschleife im Magnetfeld** (12 Punkte)

   Wir betrachten eine Leiterschleife in einem magnetischen Feld $\vec{B}$. Wir wollen sowohl eine zeitliche Änderung des $\vec{B}$-Feldes als auch eine Bewegung der Leiterschleife zulassen. In beiden Fällen erwarten wir eine in die Leiterschleife induzierte Spannung.

   a) Wir öffnen die Leiterschleife und messen die Spannung $U(1,2)$ zwischen den beiden eng benachbarten Endpunkten $1, 2$
   $$U(1,2) = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{r}.$$
   Zeigen Sie, daß $U(1,2) = -\dot{\Phi}_m$ ist. Hierbei ist
   $$\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$
   der magnetische Fluß, der durch von der Leiterschleife begrenzte Fläche S tritt.

b) Zeigen Sie ferner, daß

$$\dot{\Phi}_m = -\oint (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

gilt mit $\vec{v} = d\vec{R}/dt$ wobei $d\vec{R}$ eine infinitesimale Verschiebung des Leiterstücks $d\vec{r}$ ist.

3. Ladungsdichten (6 Punkte)

Benutzen Sie die Diracsche Delta-Distribution, um die folgenden Ladungsverteilungen als räumliche Ladungsdichten $\rho(\vec{r})$ auszudrücken:

a) Eine Ladung Q, die gleichmässig über eine Kugelschale mit Radius R verteilt ist (in Kugelkoordinaten).

b) Ein Ladungsdichte λ (pro Längeneinheit) auf der Oberfläche eines Zylinders mit Radius R (in Zylinderkoordinaten).

c) Eine Ladung Q, die gleichmässig über eine infinitesimal dünne Kreisscheibe vom Radius R verteilt ist (in Zylinderkoordinaten).

4. Magnetische Ladungen (16 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß sich die Lorentzkraft für ein Teilchen, das sowohl elektrische als auch magnetische Ladung trägt, zu

$$\vec{F} = q_e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) + \frac{q_m}{\mu_0}(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2} \times \vec{E})$$

verallgemeinert.

b) Zeigen Sie ferner, daß die Kraft $\vec{F}$ invariant bleibt, wenn man sowohl die Felder als auch die Ladungen der in der Vorlesung angegebenen Dualitätstransformation unterwirft. Beachten Sie, daß in der Vorlesung die Transformationsmatrix in Gauss Einheiten angegeben war!