Quantenmechanik I

Übungsblatt 9: Drehimpulse und Drehoperatoren II

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 04. Juli, 13:00 Uhr

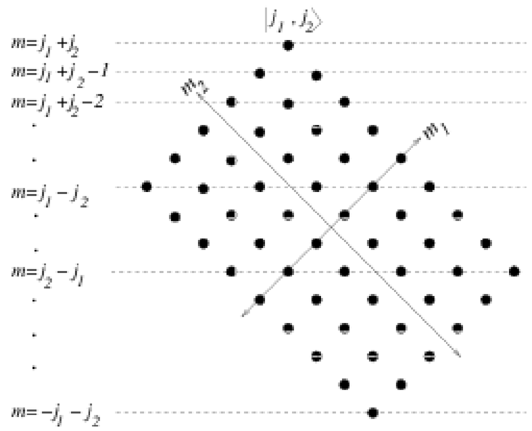

Abbildung 1: Zur Addition der Drehimpulse $j_1 = \frac{5}{2}$ und $j_2 = 4$.

1. Addition zweier Drehimpulse (15 Punkte) Es seien zwei Drehimpulse $\vec{\mathbf{J}}_1$ und $\vec{\mathbf{J}}_2$ mit den Quantenzahlen $j_1$und j_2 gegeben. Unter allen Linearkombinationen von $\vec{\mathbf{J}}_1$und $\vec{\mathbf{J}}_2$ hat nur die Summe $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{J}}_1 + \vec{\mathbf{J}}_2$ die Eigenschaften eines Drehimpulsoperators (warum?). Um die möglichen Quantenzahlen von $\vec{\mathbf{J}}$ zu finden, überlegen wir uns die Konstruktion der $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}_z$-Eigenzustände. Diese liegen im Produktraum der $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_{1z}$- und der $\mathbf{J}_2^2$, $\mathbf{J}_{2z}$-Eigenzustände. Das oben stehende Diagramm veranschaulicht diese $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ Eigenzustände für den Fall $j_1 = \frac{5}{2}$ und $j_2 = 4$. Allgemein setzen wir im folgenden oBdA $j_2 \geq j_1$ voraus.

a) Begründe, dass die Basiszustände $|j_1 m_1\rangle|j_2 m_2\rangle$ des Produktraums Eigenzustände zu $\mathbf{J}_z = \mathbf{J}_{1z} + \mathbf{J}_{2z}$ (mit Eigenwerten $\hbar(m_1 + m_2)$) sind, nicht aber Eigenzustände zu $\mathbf{J}^2$ sind (bis auf zwei Ausnahmen, siehe b).

b) Zeige, dass der Zustand $|j_1 j_1\rangle|j_2 j_2\rangle$ (ganz oben im Diagramm) Eigenzustand von $\mathbf{J}^2$ zum Eigenwert $\hbar^2 j(j+1)$ mit der Quantenzahl $j = j_1 + j_2$ ist. Wie wir aus der allgemeinen Behandlung des Drehimpulses wissen, erzeugt die sukzessive Anwendung des Absteigeoperators $\mathbf{J}_- = \mathbf{J}_{1-} + \mathbf{J}_{2-}$ auf $|j_1 j_1\rangle|j_2 j_2\rangle$ alle $2j+1$ simultanen Eigenzustände von $\mathbf{J}^2$ und $\mathbf{J}_z$ zu dieser Quantenzahl $j = j_1 + j_2$. Im Diagramm führt die Anwendung von $\mathbf{J}_-$ jeweils eine Zeile tiefer. Was läßt sich über den untersten Zustand im Diagramm sagen?

c) Bei der Konstruktion des Multipletts zu $j = j_1 + j_2$ in b) wurde genau eine Linearkombination der zwei Basisvektoren in der zweiten Zeile des Diagramms "verbraucht". Zeige, dass die verbleibende, dazu orthogonale Linearkombination Eigenzustand von $\mathbf{J}^2$ zum Eigenwert $\hbar^2 j(j+1)$ mit der Quantenzahl $j = j_1 + j_2 - 1$ ist. Sukzessive Anwendung des Absteigeoperators erzeugt die weiteren Zustände dieses Multipletts.

d) Nach Konstruktion des zweiten Multipletts in c) sind in der dritten Zeile schon 2 Linearkombinationen verbraucht. Zeige nochmal, dass die verbliebene, zu beiden orthogonale Linearkombination Eigenzustand von $\mathbf{J}^2$ zum Eigenwert $\hbar^2 j(j+1)$ mit der Quantenzahl $j = j_1 + j_2 - 2$ ist.

e) Das Verfahren endet offensichtlich, wenn beim Erreichen der Zeile $m = j_2 - j_1$ ein Multiplett zur Quantenzahl $j = j_2 - j_1$ konstruiert wird. Danach sind <u>alle</u> Linearkombinationen verbraucht. Es wurde insgesamt aus der $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_{1z}$, $\mathbf{J}_2^2$, $\mathbf{J}_{2z}$- Basis eine $\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_z$-Basis konstruiert. Zur Kontrolle prüfen Sie noch einmal die Dimensionsgleichheit beider Basissätze.

2. Drehimpulsrelationen (10 Punkte)

a) $\vec{\mathbf{J}}$ sei der Drehimpuls, $\vec{\mathbf{v}}$ ein Vektoroperator. Beweise die Identität

$$[\vec{\mathbf{v}}, \mathbf{J}^2] = \frac{\hbar}{i}(\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{J}} - \vec{\mathbf{J}} \times \vec{\mathbf{v}})$$

b) Es sei $r_\pm := x \pm iy$ und $p_\pm := p_x \pm ip_y$ sowie $L_\pm := L_x \pm iL_y$. Beweise die Kommutatorrelationen

$$[L_z, r_\pm] = \pm\hbar r_\pm$$
$$[L_z^2, r_\pm] = \hbar r_\pm(\hbar \pm 2L_z)$$
$$[L_+, r_+] = [L_-, r_-] = 0$$
$$[L_-, r_+] = [r_-, L_+] = -2\hbar z$$
$$[L^2, r_+] = 2\hbar r_+(\hbar + L_z) + [L_-, r_+]L_+$$

und analoge Beziehungen mit $p_\pm$ anstelle von $r_\pm$.

c) Begründe mit Hilfe von b), dass die l-fache Anwendung des Operators r_+ aus dem (radialsymmetrischen) l=0 Zustand $|00\rangle$ den Zustand $|ll\rangle$ erzeugt, also

$$r_+|ll\rangle \propto |l+1, l+1\rangle \text{ und } |\mathrm{lm}\rangle \propto L_-^{l-m} r_+^l |00\rangle.$$

Was lässt sich in den einfachsten Fällen ($l = 0$, $l = 1$, $m = l > 1$) über die θ-Abhängigkeit der Wellenfunktion $\langle \vec{r}|lm\rangle$ schließen?

3. Drehimpulse und Eulerwinkel (10 Punkte) Eine beliebige Drehung im Raum lässt sich durch die drei Eulerwinkel θ, ψ, ϕ beschreiben. Zuerst wird um den Winkel ϕ um die z-Achse gedreht, dann um θ um die (neue!) x'-Achse und schließlich um ψ um die neue z'-Achse. Der Operator für die gesamte Drehung ist damit $\mathbf{D}(\psi,\theta,\phi) = e^{-i\mathbf{\Lambda}_{z'}\psi}e^{-i\mathbf{\Lambda}_{x'}\theta}e^{-i\mathbf{\Lambda}_z\phi} =: \mathbf{D}_{z'}(\psi)\mathbf{D}_{x'}(\theta)\mathbf{D}_z(\phi)$.

a) Zeige, dass sich der Drehoperator $\mathbf{D}$ in folgender Form durch die (dimensionslosen) Drehimpulse $\mathbf{\Lambda}_z$und $\mathbf{\Lambda}_x$ bezüglich der alten Achsen ausdrücken lässt:

$$\mathbf{D}(\psi,\theta,\phi) = e^{-i\mathbf{\Lambda}_z\phi}e^{-i\mathbf{\Lambda}_x\theta}e^{-i\mathbf{\Lambda}_z\psi} = \mathbf{D}_z(\phi)\mathbf{D}_x(\theta)\mathbf{D}_z(\psi).$$

Die Winkel treten auf der rechten Seite also genau in der umgekehrten Reihenfolge auf und die Drehimpulskomponenten beziehen sich auf die alten Achsen. Wie lautet der Operator für die inverse Drehung?

b) Betrachte die mit den Eigenzuständen $|j,m\rangle$ von $\mathbf{\Lambda}^2$ und $\mathbf{\Lambda}_z$ gebildeten Matrizen $\langle j,m|\mathbf{D}(\psi,\theta,\phi)|j',m'\rangle$. Warum sind diese Matrizen in j, j' diagonal? Zeige, dass die Matrizen in den Fällen $j = j' = \frac{1}{2}$ und $j = j' = 1$ gegeben sind durch

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}(\phi+\psi)}\cos\frac{\theta}{2} & -ie^{\frac{i}{2}(\psi-\phi)}\sin\frac{\theta}{2} \\ -ie^{\frac{i}{2}(\phi-\psi)}\sin\frac{\theta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\phi+\psi)}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} e^{-i(\phi+\psi)}\cos^2\frac{\theta}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\phi}\sin\theta & -e^{-i(\phi-\psi)}\sin^2\frac{\theta}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\psi}\sin\theta & 1-2\sin^2\frac{\theta}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\psi}\sin\theta \\ -e^{i(\phi-\psi)}\sin^2\frac{\theta}{2} & -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\phi}\sin\theta & e^{i(\phi+\psi)}\cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Zur Berechnung der Matrixelemente zerlege zunächst

$$e^{-i\mathbf{\Lambda}_x\theta} = \cos(\theta\mathbf{\Lambda}_x) - i\sin(\theta\mathbf{\Lambda}_x) = 1 - 2\sin^2(\frac{\theta}{2}\mathbf{\Lambda}_x) - i\sin(\theta\mathbf{\Lambda}_x)$$

und finde die Wirkung der geraden und ungeraden Potenzen von $\theta\mathbf{\Lambda}_x$auf die Zustände $|j',m'\rangle$ mit Hilfe der Leiteroperatoren $\Lambda_\pm$.

4. Parität der Kugelfunktionen und Radialimpuls (5 Punkte) In der Vorlesung sind die folgenden Beweise noch offen geblieben:

a) (IV.C.17): Es sei Π der Paritätsoperator, d.h., $\Pi\Psi(\mathbf{r}) = \Psi(-\mathbf{r})$. Zeigen Sie, daß mit $\Psi_{lm}(r,\theta,\phi) = f_l(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ die Relation

$$\Pi Y_{lm}(\theta,\phi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta,\phi)$$

gilt. Die Parität der Kugelfunktionen $Y_{lm}(\theta,\phi)$ ist also gegeben durch $(-1)^l$.

b) Beweisen Sie den Satz (IV.D.5), $\mathbf{p}^2 = p_r^2 + \mathbf{L}^2/r^2$, unter Benutzung des in der Vorlesung angegebenen Ansatzes.