Quantenmechanik II

Übungsblatt 8: Relativistische Quantenmechanik

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

Fällig: Montag 9. Januar, 13:00 Uhr

1. Nützliche Relationen (8 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Relationen

a)

$$\left(\beta\vec{\alpha}.\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}\right)^2 = -1,$$

b)

$$(\vec{\sigma}.\vec{a})(\vec{\sigma}.\vec{b}) = \vec{a}.\vec{b} + i\vec{\sigma}.(\vec{a}\times\vec{b}).$$

2. Kleinsches Paradoxon (12 Punkte)

Ein Teilchen mit Ladung e und Impuls p bewege sich gegen eine elektrostatische Potentialstufe $V(x) = \phi\Theta(x)$. Lösen Sie die Klein-Gordon-Gleichung

$$(E_p - eV)^2\psi(x) = -\hbar^2c^2\partial_x^2\psi(x) + m^2c^4\psi(x)$$

und diskutieren Sie die Ladungsdichte $\rho(x)$ und den Reflexionskoeffizienten in den Fällen:

a) $V < E_p - mc^2$,

b) $E_p - mc^2 < V < E_p + mc^2$,

c) $V > E_p + mc^2$.

3. Coulomb-Problem in der Dirac-Theorie (20 Punkte)

Lösen Sie die stationäre Dirac-Gleichung für die gebundenen Zustände im Potential $\phi(r) = \frac{Ze}{r}$ exakt und vergleichen Sie die Energieeigenwerte mit denen der Schrödingergleichung. Hinweis: Mit dem Ansatz

$$\psi = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}g(\vec{r}) \\ \frac{i}{r^2}(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})f(\vec{r}) \end{pmatrix}$$

für den 4-komponentigen Diracspinor erhält man ein Gleichungssystem für $\begin{pmatrix} g \\ f \end{pmatrix}$, das nur die Operatoren $\frac{\partial}{\partial r}$ und $\vec{\sigma}\cdot\vec{L}$ enthält. Die 2-komponentigen Spin-Kugelfunktionen $Y_\ell^{j\,m}$ zum Spin 1/2, mit den Eigenwerten

$$\left(J^2,\, J_z,\, L^2,\, S^2\right) Y_\ell^{j\,m} = (j(j+1),\, m,\, \ell(\ell+1),\, 3/4)\, Y_\ell^{j\,m}$$

sind dann auch Eigenfunktionen zu $\vec{\sigma} \cdot \vec{L}$ (Beweis?) und der Ansatz $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{j\ell}(r) Y_\ell^{j\,m} \\ G_{j\ell}(r) Y_\ell^{j\,m} \end{pmatrix}$ führt auf ein gekoppeltes Gleichungssystem für die Radialfunktionen F und G. Bestimmen Sie daraus nach Einführung der dimensionslosen Variable $\rho = \beta r$ mit $\beta = \sqrt{m^2c^4 - E^2}/\hbar c$ deren asymptotisches Verhalten für $\rho \to 0$ und $\rho \to \infty$. Nach Abspaltung dieser Anteile kann man die verbleibenden beiden Gleichungen durch einen Potenzreihenansatz $\sum_\nu \begin{pmatrix} a_\nu \\ b_\nu \end{pmatrix} \rho^\nu$ lösen. Zeigen Sie aus den sich ergebenden Rekursionsgleichungen für die Koeffizienten a_ν, b_ν dass für normierbare Zustände diese Reihe abbrechen muss, und legen Sie damit die Energieeigenwerte fest.