Theoretische Elektrodynamik

Übungsblatt 8: Vektoranalysis und Elektrostatik

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 18. Juni, 16:00 Uhr

1. Differentialoperatoren (10 Punkte)

Beweisen Sie für hinreichend glatte Funktionen $f(\vec{r}), \vec{u}(\vec{r}), \vec{v}(\vec{r})$ folgende Identitäten:

i) $\nabla \cdot \vec{r} = 3, \;\; \nabla \times \vec{r} = 0, \;\; \nabla |\vec{r}|^2 = 2\vec{r}$

ii) $\nabla \cdot (f\vec{u}) = (\nabla f) \cdot \vec{u} + f\nabla \cdot \vec{u}$

iii) $\nabla \times (f\vec{u}) = (\nabla f) \times \vec{u} + f(\nabla \times \vec{u})$

iv) $\nabla \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (\nabla \times \vec{u}) \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot (\nabla \times \vec{v})$

v) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0$

vi) $\nabla \times (\nabla \times \vec{u}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \triangle \vec{u}$

vii) $\nabla \frac{1}{|\vec{r}|} = -\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

2. Delta-Distribution (5 Punkte)

a) Beweisen Sie: $\delta(a\vec{x}) = |a|^{-3}\delta(\vec{x}), \;\; a$ konstant

b) Berechnen Sie in einer Dimension

$$\int_{\mathbb{R}} dx\, f(x)\delta'(x),$$

wobei $\delta'(x) = \frac{d}{dx}\delta(x)$.

c) Es sei $\theta(x)$ die *Heaviside*-Distribution (oder "Stufenfunktion"), definiert durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 \;, \; x \leq 0 \\ 1 \;, \; x > 0 \end{cases}$$

Beweisen Sie $\frac{d}{dx}\theta(x) = \delta(x)$.

3. Elektrisches Feld (10 Punkte)

a) Ein infinitesimal dünner Draht sei in der x-y-Ebene zu einem Kreis mit Radius R und Mittelpunkt im Ursprung gebogen und mit konstanter Linienladungsdichte λ geladen. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r})$ am Punkt $\vec{r} = (0, 0, z)$. Betrachten Sie die Grenzfälle $R \to \infty$ und $z \gg R$.

b) Ersetzen Sie den Draht durch eine infinitesimal dünne, mit konstanter Flächenladungsdichte σ geladene Kreisscheibe. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}(0, 0, z)$ und betrachten Sie die Grenzfälle $R \to \infty$, $z \gg R$ und $z \to 0$.

4. Helmholtz-Gleichung (15 Punkte)

a) Leiten Sie den Laplace-Operator $\triangle = \nabla^2$ in Kugelkoordinaten r, ϑ, φ her.

b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung $(\triangle + \omega^2) f(\vec{r}) = 0$, ω konstant, mit dem Produktansatz $f(\vec{r}) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\varphi)$ in drei unabhängige Differentialgleichungen für R, Θ und Φ separiert.