Quantenmechanik I

Übungsblatt 8: Drehimpuls und Drehoperatoren

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 20. Juni, 13:00 Uhr

1. **Die Eigenwerte des Drehimpulses** (18 Punkte)

   Wir betrachten einen Drehimpulsoperator $\vec{J}$, fordern aber nicht speziell $\vec{J} = \hat{\vec{L}} = \vec{r} \times \hat{\vec{p}}$; diesen Operator nennen wir dann Bahndrehimpuls. Es gilt

   $$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x \text{ und } [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y.$$

   Normierte Eigenzustände von $\hat{J}^2$ und $\hat{J}_z$ schreiben wir als $|ab>$ mit

   $$\hat{J}^2|ab>= \hbar^2 a|ab> \text{ und } \hat{J}_z|ab>= \hbar b|ab> .$$

   Im folgenden setzen wir $\hbar = 1$.

   a) (4 Punkte) Warum sind a und b reell? Wir definieren nun die Leiteroperatoren: $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$. Da $\hat{J}_{x,y}$ hermitesch, folgt $\hat{J}_-^\dagger = \hat{J}_+$. Berechne

   $$[\hat{J}_+, \hat{J}_-], \quad [\vec{J}^2, \hat{J}_\pm] \text{ und } [\vec{J}^2, \hat{J}_z].$$

   b) (7 Punkte) Zeige, daß

   $$\hat{J}_z\hat{J}_\pm|ab>= (b \pm 1)\hat{J}_\pm|ab> .$$

   Was für einen Zustand ist $\hat{J}_\pm|ab>$? Was ist $\vec{J}^2\hat{J}_\pm|ab>$? Zeige, daß $a \geq b^2$. Hinweis: Betrachte $< ab|\vec{J}^2|ab >$.
   Berechne die Eigenwerte von $\hat{J}_z$ für

   $$(\hat{J}_+)^n|ab> \text{ und } (\hat{J}_-)^n|ab>,$$

   und zeige, daß es einen größten und kleinsten möglichen Eigenwert b zu festem a gibt.

   c) (7 Punkte) Wir nennen den größten und kleinsten möglichen Eigenwert b_+ bzw. b_-. Zeige, daß $a = (b_+)^2 + b^+$ und $a = (b_-)^2 - b_-$. Hinweis: Berechne $0 = \hat{J}_-\hat{J}_+|ab_+>$ und $0 = \hat{J}_+\hat{J}_-|ab_->$ mit $\hat{J}_\mp\hat{J}_\pm = \vec{J}^2 - \hat{J}_z^2 \mp \hat{J}_z$.
   Verwende diese Ergebnisse, um die möglichen Werte der a und b zu berechnen. Wie viele mögliche Eigenwerte für b gibt es zu festem a?

2. Darstellung von Drehoperatoren (12 Punkte)

a) (5 Punkte) Wir nennen die Eigenzustände zu $\vec{J}^2$ und $\hat{J}_z$ nun $|j,m>$ mit $\vec{J}^2|j,m>= j(j+1)|j,m>$ und $\hat{J}_z|j,m>= m|j,m>$. Die "Leiteroperatoren" $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ wirken gemäß

$$\hat{J}_+|j,m>= \sqrt{j(j+1)-m(m+1)}|j,m+1>$$

und

$$\hat{J}_-|j,m>= \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}|j,m-1> .$$

Bestätige die Normierungsfaktoren in diesen Beziehungen.

b) (7 Punkte) Gib für die Fälle $j=\frac{1}{2}$ und $j=1$ die Matrizen

$$< j,m'|\hat{J}_\alpha|j,m>$$

mit $\alpha = x,y,z$ explizit an.