

# Quantenmechanik II

## Übungsblatt 7: Meßprozeß und versteckte Parameter

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

**In der Übungsstunde am 13.12. findet die erste Klausur statt!**

Fällig: Montag 19. Dezember, 13:00 Uhr

In der Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik führt erst der Meßprozeß selber zu einem Kollaps der Wellenfunktion. Wenn wir also zwei Spin-1/2 Teilchen im verschränkten Zustand

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

erzeugen mit  $\sigma_z|\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$  und  $\sigma_z|\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle$ , so bleiben die Spinkomponenten unbestimmt bis zum Augenblick der Messung. Die Verschränkung macht sich instantan bemerkbar.

In einer (einfachen) Theorie mit versteckten Parametern geht man hingegen davon aus, daß die quantenmechanische Theorie nur eine effektive Beschreibung ist, die "wahre" Theorie aber zusätzliche Parameter enthält, die diese 'spukhafte Fernwirkung' überflüssig machen. Dies kann man sich z.B. so vorstellen, daß die beiden Teilchen eine Liste mit sich tragen, die den Ausgang jeder möglichen Kombination von Messungen der Spinkomponenten an den Teilchen 1 und 2 beinhaltet. Solche Theorien stehen aber im Widerspruch zu den *Bellschen Ungleichungen*.

Hier wollen wir ein einfaches Beispiel betrachten, das ohne den Gebrauch von Ungleichungen zeigt, daß lokal realistische Theorien scheitern.

### 1. Verschränkungsexperiment (30 Punkte)

Wir betrachten ein Gedankenexperiment mit einem Emitter und drei Detektoren. Die Detektoren sollen dabei raumartigen Abstand haben, d.h., die Meßprozesse können sich nicht gegenseitig beeinflussen, sofern der Austausch von Signalen durch die Lichtgeschwindigkeit limitiert ist. Es sollen drei Spin-1/2 Teilchen im Zustand

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$$

emittiert werden.  $\sigma_{x,y,z}^i$  seien die Pauli-Matrizen angewandt auf das  $i$ -te Teilchen.

- a) Zeigen Sie, daß  $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_z^3 |\Psi\rangle = +1 |\Psi\rangle$  !
- b) Wir nehmen nun an, daß die Information über die Spinausrichtungen schon vorhanden ist, *bevor* die Messung ausgeführt wird. Auf eine Messung  $XYY$  (Messung mit dem Operator  $\sigma_x^1 \sigma_y^2 \sigma_z^3$ ) wie in a) gibt das System z.B. die Antwort  $+1, -1, -1$ . Dies ist kompatibel mit dem quantenmechanischen Resultat, da das Produkt  $(+1)(-1)(-1) = +1$ . Außerdem ist zu beachten, daß die Teilchen ununterscheidbar sind. Dies bedeutet, daß für die Messungen  $XYY = YXY = YYX$  gilt. Welches sind die 4 verschiedenen Tupel  $\pm 1, \pm 1, \pm 1$ , die mit dem Meßergebnis a) vereinbar sind?
- c) Vervollständigen Sie die folgende Tabelle:

| gemessen | kompatibel | eindeutig bestimmt | eindeutig bestimmt |
|----------|------------|--------------------|--------------------|
| $XYY$    | $YXY$      | $YYX$              | $XXX$              |
| 1,-1,-1  | -1,1,-1    | -1,-1,1            | 1,1,1              |

*Hinweis:* Jeder der 4 Tupel, die mit der  $XYY$  Messung kompatibel sind, spaltet in 2 kompatible  $YXY$ -Werte auf.

Zeige, daß diese Theorie der lokalen Realität insbesondere vorhersagt, daß die  $XXX$  Messung *immer*  $+1$  ergibt.

- d) Zeige, daß im Widerspruch hierzu die Quantenmechanik

$$\sigma_x^1 \sigma_x^2 \sigma_x^3 |\Psi\rangle = -1 |\Psi\rangle$$

ergibt. Hiermit ist ohne den Gebrauch der Bellschen Ungleichungen gezeigt, daß eine einfache Theorie lokaler Realität zum Scheitern verurteilt ist.