Theoretische Mechanik

Übungsblatt 7: Poisson-Klammern und kanonische Transformationen

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 11. Juni, 16:00 Uhr

1. Poisson-Klammern (14 Punkte)

a) Zeigen Sie folgende Identitäten der Poisson-Klammern für Phasenraumfunktionen f, g, h:

i) Bilinearität:

$$\{af + bg, h\} = a\,\{f, h\} + b\,\{g, h\}\,, \tag{1}$$

wobei a und b Konstanten sind.

ii) Antisymmetrie:

$$\{f, g\} = -\,\{g, f\} \tag{2}$$

iii) Produktregel:

$$\{f, gh\} = \{f, g\}\,h + g\,\{f, h\} \tag{3}$$

iv) Jacobi-Identität:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \tag{4}$$

b) Beweisen Sie das Poisson-Theorem: Sind f und g Erhaltungsgrößen, so ist auch $\{f, g\}$ eine Erhaltungsgröße.

2. Kepler-Problem (14 Punkte)

Zwei punktörmige Massen m_1 und m_2 wechselwirken über das Potential $V = -k/|\vec{r_1} - \vec{r_2}|$.

a) Geben Sie die Lagrange-Funktion in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten an und transformieren Sie zur zugehörigen Hamilton-Funktion.

b) Stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf und zeigen Sie insbesondere, dass der Schwerpunktimpuls erhalten ist, sodass Schwerpunkt- und Relativbewegung getrennt behandelt werden können.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass der Drehimpuls im Relativsystem $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ erhalten ist.

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Poisson-Klammern, dass das System eine weitere Erhaltungsgröße besitzt, den Lenz-Runge-Vektor

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \tag{5}$$

e) Auf Aufgabenblatt 4 wurde gezeigt, dass die Relativbewegung in einer zeitlich konstanten Ebene abläuft. Zeigen Sie, dass der Lenz-Runge-Vektor ebenfalls in der Ebene der Bahnkurve liegt.

f) Stellen Sie nun die Lagrange-Funktion für die Relativbewegung in ebenen Polarkoorinaten r, ϕ auf und transformieren Sie zur Hamilton-Funktion.

g) Die Orientierung von $\vec{A}$ in der Ebene sei ohne Einschränkung entlang $\phi = 0$ gegeben. Leiten Sie dann eine Gleichung für die Bahnkurve $r(\phi)$ her.

3. Harmonischer Oszillator (12 Punkte)
Eine Masse m bewege sich im harmonischen Potential $V = m\omega^2 q^2/2$.

a) Stellen Sie Lagrange- und Hamilton-Funktion auf und lösen Sie die kanonischen Gleichungen.

b) Die Funktion

$$F(q, Q) = \frac{m\omega}{2} q^2 \cot Q \tag{6}$$

sei erzeugende Funktion einer kanonischen Transformation. Stellen Sie die neue Hamilton-Funktion $H'(Q, P)$ auf. Wieso ist die durch F erzeugte Transformation günstig? Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für die neuen Koordinaten Q, P und vergleichen Sie das Ergebnis durch Rücktransformation mit den Resultaten aus a).

c) Bestimmen Sie die Konstante c so, dass $Q' = c\,(p + im\omega q)$, $P' = c\,(p - im\omega q)$ eine kanonische Transformation von q, p darstellt. Stellen Sie die neue Hamilton-Funktion $H''(Q', P')$ sowie die kanonischen Gleichungen für die Koordinaten Q', P' auf.