Quantenmechanik I

Übungsblatt 7:
Dichteoperator, Heisenbergbild und periodische Potentiale

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 6. Juni, 13:00 Uhr

1. Verschränkung und Dichtematrizen (10 Punkte)

Wir betrachten ein quantenmechanisches System, das aus zwei voneinander unabhängigen Teilen A, B mit zugehörigen Hilberträumen H_A und H_B besteht. Der Hilbertraum des Gesamtsystems $\mathcal{H}$ entspricht dann dem Tensorprodukt der Vektorräume $\mathcal{H} = H_A \otimes H_B$. Falls sich System A im Zustand $|\Psi\rangle_A$ und System B im Zustand $|\Phi\rangle_B$ befindet, so ist der Zustand des Gesamtsystems $|\Psi\rangle_A \otimes |\Phi\rangle_B$.

a) Die Teile A, B seien identisch und der Hilbertraum $H_A = H_B$ habe eine Orthonormalbasis $\{|n\rangle\}$ der Dimension N, d.h., $n = 1, \cdots, N$. Wie sieht dann eine Basis des Gesamtsystems $\mathcal{H}$ aus? Welche Dimension hat $\mathcal{H}$?

b) Wie verallgemeinert sich dies auf ein System, das aus M identischen Teilen - jeder mit Dimension N - besteht? Wie groß ist dann die Dimension des Gesamthilbertraums $\mathcal{H}$?

c) Wir wollen nun wieder zu einem Gesamtsystem bestehend aus Teilen A, B zurückkehren und den Fall betrachten, daß die Hilberträume H_A, H_B zweidimensional sind mit Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Wir wollen insbesondere die beiden Zustände des Gesamtsystems

$$|\alpha\rangle = |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B \quad \text{und}$$

$$|\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right)$$

betrachten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für einen Beobachter das Teilsystem A im Zustand $|0\rangle_A$ zu finden, wenn sich das Gesamtsystem im Zustand $|\alpha\rangle$ bzw. $|\beta\rangle$ befindet? Was bedeutet dies für eine darauf folgende Messung des Zustandes von Teilsystem B?

Hinweis: Kollaps der Wellenfunktion

d) Geben Sie explizit die Dichtematrizen $\rho^{(\alpha)} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$ und $\rho^{(\beta)}$ (analog definiert) an!

e) Berechnen Sie die *reduzierten Dichtematrizen* für das Teilsystem A, die durch die Teilspur

$$\rho_A^{(\kappa)} = \mathrm{Sp}_B \rho^{(\kappa)} = \sum_{j=0,1} \langle j|_B \left(|\kappa\rangle\langle\kappa|\right) |j\rangle_B$$

mit $\kappa = \alpha, \beta$ definiert sind. Welche der beiden Dichtematrizen $\rho_A^{(\alpha)}$ bzw. $\rho_A^{(\beta)}$ entspricht der Dichtematrix einer reinen bzw. einer gemischten Gesamtheit? Der Zustand, der zu einer Dichtematrix einer gemischten Gesamtheit führt wird als *verschränkter Zustand*, der zu einer reinen Gesamtheit führende als *Produktzustand* bezeichnet.

2. Freies Teilchen im Heisenbergbild (5 Punkte)

Betrachte die kräftefreie eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m:

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

a) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für den Ortsoperator $q_\mathrm{H}(t)$ und den Impulsoperator $p_\mathrm{H}(t)$ im Heisenbergbild.

b) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[q_\mathrm{H}(t_1), q_\mathrm{H}(t_2)]\,, \quad [p_\mathrm{H}(t_1), p_\mathrm{H}(t_2)]\,, \quad [q_\mathrm{H}(t_1), p_\mathrm{H}(t_2)]\,.$$

3. Periodisches Potential in einer Dimension (15 Punkte)

Gegeben sei ein eindimensionales räumlich periodisches Potential $V(x)$ mit der Periode a, das heißt es gelte $V(x+a) = V(x)$. Wir suchen stationäre Zustände eines Teilchens der Masse m mit positiver Energie E.

a) Zeige: Der Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

und der Translationsoperator $T_a = \exp\{-iap/\hbar\}$ kommutieren, können also gemeinsam diagonalisiert werden.

b) Es sei $\phi_k(x)$ eine gemeinsame Eigenfunktion von H und T_a mit Eigenwert e^{-ika} für T_a. Zeige, dass $u_k(x) := \mathrm{e}^{-ikx}\phi_k(x)$ periodisch ist gemäß $u_k(x) = u_k(x+a)$ ("Bloch Theorem").

c) Zeige, dass $u_k(x)$ der "Schrödingergleichung"

$$\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(k - i\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V(x) - E\right] u_k(x) = 0$$

genügt.

d) Betrachte speziell das periodische Potential ("Kronig-Penney-Modell")

$$V(x) = aV_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - na).$$

Führe dimensionslose Variable

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \Omega = \frac{2ma^2}{\hbar^2} V_0, \quad \kappa^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2} E$$

für Ort x, Potentialstärke V_0 und Wellenzahl κ ein. Setze für die Wellenfunktion zwischen zwei Delta-Zacken, $n < \xi < n+1$, an: $\phi(x) = a_n \exp\{i\kappa\xi\} + b_n \exp\{-i\kappa\xi\}$. Leite aus den Anschlußbedingungen bei $\xi = n$ unter Berücksichtigung der Periodizitätseigenschaften die Relation

$$\cos(ka) = \cos\kappa + \frac{\Omega}{2\kappa} \sin\kappa$$

her, aus welcher die erlaubten κ-Werte und damit die Energieeigenwerte in Abhängigkeit von k und Ω berechnet werden können. Was ist der fundamentale Unterschied zu einem Potential aus nur endlich vielen Delta-Zacken?