Vielteilchentheorie WS 13/14
Aufgabenblatt 6

J. Sirker und P. Korell

Freitag, 7.2.14

1. Die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion

Wir wollen die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion

$$C(\mathbf{q},\omega_n) = \int_0^\beta d\tau \int d^d x e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x}-\omega_n\tau)} \langle T_\tau n(\mathbf{x},\tau) n(0,0)\rangle_T \qquad (1)$$

zur Temperatur T betrachten, wobei $n(\mathbf{x},\tau)$ der Dichteoperator am Ort $\mathbf{x}$ zur imaginären Zeit τ ist. Der Dichteoperator und damit die Matsubara-Frequenzen ω_n sind bosonisch.

i) Zeigen Sie für ein System freier Elektronen unter Benutzung des Wickschen und des Linked-Cluster Theorems, daß diese Korrelationsfunktion als

$$C(\mathbf{q},\omega_n) = -\frac{T}{L^d} \sum_{\omega_m} \sum_{\mathbf{q}'} G(\mathbf{q}',\omega_m) G(\mathbf{q}'+\mathbf{q},\omega_m+\omega_n) \qquad (2)$$

geschrieben werden kann, wobei G die fermionische Greensche Funktion ist und ω_m eine fermionische Matsubara Frequenz.

ii) Zeigen Sie, daß

$$C(\mathbf{q},\omega_n) = \frac{1}{L^d} \sum_{\mathbf{q}'} \frac{f(\xi_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}}) - f(\xi_{\mathbf{q}'})}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} + \xi_{\mathbf{q}'}} \qquad (3)$$

indem Sie die Matsubara Summe ausführen. $\xi_{\mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}^2}{2m} - \varepsilon_F$ ist hierbei die Dispersionsrelation der Elektronen und $f(\xi)$ die Fermifunktion. Berechnen Sie nun die Dichte-Dichte Korrelationsfunktion im Limes $|\omega_n| \ll |\mathbf{q}| v_F$, $|\mathbf{q}| \ll k_F$ und bei Temperatur Null für den dreidimensionalen Fall $d = 3$.

iii) Wir wollen nun diese Korrelationsfunktion in einem System mit einem zusätzlichen Coulombpotential $V(\mathbf{q})$ betrachten. Im Wechselwirkungsbild gilt dann

$$C(\mathbf{q},\omega_n) = \langle \mathrm{T}_\tau \, e^{-\int_0^\beta \mathrm{d}\tau H_I(\tau)} n(\mathbf{q},\omega_n) n(-\mathbf{q},-\omega_n)\rangle. \qquad (4)$$

Entwickeln Sie diesen Ausdruck in der Wechselwirkung und benutzen Sie das Wicksche Theorem, um die verbundenen Diagramme erster und zweiter Ordnung zu finden. Zeichnen Sie die Feynman Diagramme dieser Terme.

iv) Die *Random Phase Approximation* (RPA) berechnet nun eine unendliche Summe von Diagrammen für die Dichte-Dichte Responsefunktion, die wie

$$[C(\mathbf{q}, \omega_n)]^N [V(\mathbf{q})]^{N-1} \tag{5}$$

aussehen. Andere Diagramme werden vernachlässigt. Verallgemeinern Sie die Ergebnisse in erster und zweiter Ordnung und versuchen Sie, diesen Teil der Diagramme als Dyson Gleichung zu schreiben. Wie sieht die Dichte-Dichte Responsefunktion in der RPA Näherung dann formal aus?