Quantenmechanik II

Übungsblatt 6: Zweite Quantisierung

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

Fällig: Montag 5. Dezember, 13:00 Uhr

1. **Besetzungszahldarstellung** (15 Punkte)

   Ein Zustand kann in Besetzungszahldarstellung als $|\{n_i\}\rangle = |n_1, n_2, n_3, \ldots\rangle$ geschrieben werden. n_i ist dabei die Anzahl der Teilchen im Zustand i. Für Fermionen ist n_i entweder 0 oder 1. Ein Zustand in der Besetzungszahldarstellung kann, wie in der Vorlesung beschrieben, sukzessive aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ mittels der Erzeugungsoperatoren $a_i^\dagger$ aufgebaut werden.

   i) Schreiben Sie die fermionischen Zustände $|1,0,1,0,1\rangle$ und $|1,1,1,0,0\rangle$ mittels der Erzeugungsoperatoren angewandt auf den Vakuumzustand $|0\rangle$.
   ii) Berechnen Sie $\langle 0|a_1 a_3|1,0,1,0,0\rangle$ (fermionisch).
   iii) Der Teilchenzahloperator ist gegeben durch $N = \sum_i n_i = \sum_i a_i^\dagger a_i$. Berechnen Sie $\langle\psi|N|\psi\rangle$,für $|\psi\rangle = A|1,0,1,1\rangle + B|1,1,0,0\rangle$ (fermionisch). *Denken Sie an die Normierung!*
   iv) Für den bosonischen Fall betrachten wir einen *kohärenten Zustand* $|\psi\rangle = e^{\sum_i \alpha_i a_i^\dagger}|0\rangle$. Zeigen Sie, daß dieser ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators ist mit $a_j|\psi\rangle = \alpha_j|\psi\rangle$.
   v) Berechnen Sie $\langle\psi|N|\psi\rangle$ für den kohärenten Zustand. *Hinweis: Was ist* $\langle\psi|a_i^\dagger a_i|\psi\rangle$*?*

2. **Fermionische Statistik** (7 Punkte)

   i) Berechnen Sie die Zustände $a_5|1,1,1,0,1,0,1\rangle$ und $a_5|1,0,1,0,1,0,1\rangle$ explizit.
   ii) Jetzt betrachten wir einen allgemeinen fermionischen Zustand $|\{n_i\}\rangle = |n_1, n_2, n_3, \ldots\rangle$. Berechnen Sie den Zustand $a_j|\{n_i\}\rangle$ für die zwei Fälle $n_j = 0$ und $n_j = 1$. *Hinweis: Teilen Sie die Erzeugungsoperatoren auf in solche, die auf* $i < j$ *und solche, die auf* $i > j$ *wirken.*

3. **EPR** (8 Punkte)

   Wir betrachten zwei Teilchen A und B mit Spin-1/2. Die beiden möglichen Spinzustände seien durch $|0\rangle$ und $|1\rangle$ gekennzeichnet. Gegeben sei der gemischte Zustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}}\left(\alpha|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - \beta|1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right).$$

i) Berechnen Sie die Normalisierungskonstante $\mathcal{N}$.

ii) Zuerst wird der Spin des Teilchens A gemessen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Teilchen sich im Zustand $|0\rangle$ ("Spin $-1/2$") oder im Zustand $|1\rangle$ ("Spin $+1/2$") befindet?

iii) Wir nehmen an, daß das Resultat der Messung für den Spin von A $+1/2$ sei. Was muß dann der Spin von B sein?

iv) Berechnen Sie die reduzierten Dichtematrizen (siehe auch Vorlesung und Übungen QM I) $\rho_A = \mathrm{Tr}_B|\psi\rangle\langle\psi|$ und $\rho_B = \mathrm{Tr}_A|\psi\rangle\langle\psi|$. Wie würde die reduzierte Dichtematrix für einen reinen Zustand aussehen?