Theoretische Mechanik

Übungsblatt 6: Drehungen und Trägheitstensoren starrer Körper

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 28. Mai, 16:00 Uhr

1. **Drehmatrix und momentane Winkelgeschwindigkeit** (8 Punkte)

   Der in der Vorlesung eingeführte Vektor $\vec{\omega}(t)$ wird als momentane Winkelgeschwindigkeit bezeichnet. Um diesen Namen zu rechtfertigen, betrachten Sie eine Drehmatrix, die für ein kurzes Zeitintervall in der Nähe eines festen Zeitpunkts t_0 eine gleichmäßige Drehung um eine feste Achse beschreibt. Der Drehwinkel sei dabei $\phi(t)$. Zeigen Sie, daß der zugehörige Vektor $\vec{\omega}(t_0)$ dann gerade in die Richtung der Drehachse zeigt und sein Betrag durch $\dot{\phi}(t_0)$ gegeben ist.

2. **Kinetische Energie des starren Körpers** (8 Punkte)

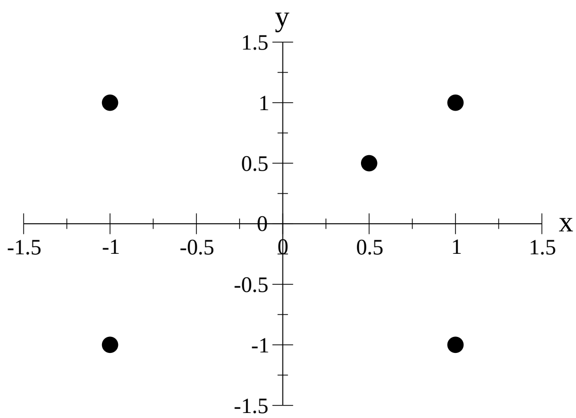
   In der Vorlesung war gezeigt worden, daß bei einer Rotation um einen ortsfesten Aufpunkt $O = O'$ die kinetische Energie durch

   $$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\sum_{k,l} I_{kl}\omega_k\omega_l$$

   gegeben ist. Zeigen Sie, daß für einen allgemeinen Aufpunkt $O(t) \equiv O'$ des körperfesten Koordinatensystems die kinetische Energie $T = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}} + T_m$ lautet, wobei T_{trans} ein Translationsanteil und T_m ein gemischter Anteil ist. Zeigen Sie ferner, daß T_m verschwindet wenn $O(t)$ dem Schwerpunkt des Körpers entspricht.

3. Trägheitsmomente (16 Punkte)

a) Berechnen Sie die Trägheitsmomente I_{kl} der diskreten Masseverteilung aus der Skizze (die Massen liegen in der $x - y$ Ebene) bezüglich des angegebenen kartesischen Koordinatensystems. Alle Massen m seien identisch. Diagonalisieren Sie den Trägheitstensor. In welche Richtungen zeigen die Eigenvektoren (Hauptachsen)?



z-Achse aus Bildebene hinaus

b) Berechnen Sie die Trägheitsmomente (als Funktion der Gesamtmasse M) eines Kreiskegels mit Grundflächenradius R und Höhe H bezüglich eines körperfesten kartesischen Koordinatensystems mit Aufpunkt im Mittelpunkt des Grundflächenkreises und z-Achse durch die Kegelspitze für folgende Masseverteilungen:

i) konstante Massendichte ρ,

ii) $\rho(x, y, z) = \rho_0(1 - z/H)$ mit $\rho_0 = \text{const}$,

iii) Hohlkegel mit konstanter Massendichte ρ auf dem Kegelmantel.

4. Trägheitsmoment bezüglich eines verschobenen Aufpunkts (8 Punkte)

a) Es sei der Trägheitstensor I^S_{kl} eines Körpers bezüglich des Schwerpunkts S bekannt. Zeigen Sie, daß das Trägheitsmoment I_{kl} bezüglich eines beliebigen anderen Aufpunkts O' des körperfesten Bezugssystems dann durch

$$I_{kl} = I^S_{kl} + m(|\vec{Z}|^2 - Z_k Z_l)$$

gegeben ist, wobei $\vec{Z} = S - O'$ der Verbindungsvektor von O' zum Schwerpunkt S ist.

b) Nutzen Sie die Umkehrung dieser Relation, um das Trägheitsmoment aus Aufgabe 3.b.i) bezüglich des Schwerpunkts anzugeben.