Quantenmechanik I

Übungsblatt 6:
Dirac-Notation und Operatoridentitäten

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 30. Mai, 13:00 Uhr

1. Projektionsoperator und Matrixdarstellung (3 Punkte)

a) Sei $\mathbf{P} = |u\rangle\langle u|$ ein Projektionsoperator. Berechnen Sie die möglichen Eigenwerte von $\mathbf{P}$!

b) Geben Sie die Matrixdarstellung von Orts-, Impuls- und Hamiltonoperator für den harmonischen Oszillator in der Energie-Eigenbasis $\{|n\rangle\}$ an.

2. Paritätsoperator (7 Punkte) Der Paritätsoperator $\mathbf{\Pi}$ ist als hermitescher Operator definiert, der in folgender Weise auf die Ortseigenzustände $|x\rangle$ wirkt

$$\mathbf{\Pi}|x\rangle = |-x\rangle.$$

a) Begründe, dass $\mathbf{\Pi}^2 = 1$ ist und $\mathbf{\Pi}$ mit dem Ortsoperator $\hat{x}$ antikommutiert, d.h. dass $\mathbf{\Pi}\hat{x} + \hat{x}\mathbf{\Pi} = 0$ oder auch $\mathbf{\Pi}\hat{x}\mathbf{\Pi} = -\hat{x}$ gilt.

b) Was ist $\mathbf{\Pi}\hat{p}\mathbf{\Pi}$, mit $\hat{p}$ = Impulsoperator?

c) Berechnen Sie die möglichen Eigenwerte von $\mathbf{\Pi}$.

d) Für welche in der Vorlesung und den Übungen betrachteten Hamiltonoperatoren H gilt $[H, \mathbf{\Pi}] = 0$? Was bedeutet dies für die Eigenzustände von H?

3. Baker-Hausdorff-Formel (8 Punkte) Beweise die Baker-Hausdorff-Formel

$$e^{\mathbf{B}}\mathbf{A}e^{-\mathbf{B}} = \mathbf{A} + [\mathbf{B}, \mathbf{A}] + \frac{1}{2}[\mathbf{B}, [\mathbf{B}, \mathbf{A}]] + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}[\mathbf{B}, \mathbf{A}]_n$$

mit $[\mathbf{B}, \mathbf{A}]_{n+1} = [\mathbf{B}, [\mathbf{B}, \mathbf{A}]_n]$, $[\mathbf{B}, \mathbf{A}]_0 = \mathbf{A}$.

Tipp: Stelle eine DGL 1. Ordnung für die operatorwertige Funktion $\mathbf{C}(\lambda) := e^{\lambda\mathbf{B}}\mathbf{A}e^{-\lambda\mathbf{B}}$ auf und löse sie.

4. Eine weitere nützliche Operatoridentität (8 Punkte) Beweise

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}e^{-[\mathbf{A},\mathbf{B}]/2} = e^{\mathbf{B}}e^{\mathbf{A}}e^{-[\mathbf{B},\mathbf{A}]/2}$$

falls

$$[\mathbf{A},[\mathbf{A},\mathbf{B}]] = [\mathbf{B},[\mathbf{A},\mathbf{B}] = 0$$

Tipp: Differenziere $\mathbf{f}(\lambda) = e^{\lambda\mathbf{A}}e^{\lambda\mathbf{B}}e^{-\lambda(\mathbf{A}+\mathbf{B})}$ nach λ und löse die sich ergebende DGL.

5. Zustandsvektor und Ortswellenfunktion (4 Punkte)

a) $|\Psi\rangle$ sei der Zustandsvektor eines Teilchens, das sich längs der x-Achse bewegt. Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit w_{ab} das Teilchen im Intervall (a, b) der x-Achse anzutreffen, durch den Erwartungswert

$$w_{ab} = \langle\Psi|F(\hat{x})|\Psi\rangle, \text{ mit } \hat{x} = \text{Ortsoperator}, \ F(\hat{x}) := \begin{cases} 1 & \text{für x} \in \text{(a, b)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist.

b) Wie ist die Größe $\langle\Psi|\delta(\xi - \hat{x})|\Psi\rangle$ zu deuten? Berechne sie explizit für den Grundzustand $|0\rangle$ des harmonischen Oszillators.