Quantenmechanik II

Übungsblatt 5: Zeitabhängige Störungstheorie für ein Zweiniveausystem

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

Fällig: Montag 28. November, 13:00 Uhr

1. **Ein Zweiniveausystem** (30 Punkte)

   Wir betrachten ein Quantensystem mit zwei Zustanden, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, und dem ungestörten (zeitunabhängigen) Hamilton-Operator

   $$\hat{H}_0 = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -\omega_0 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix}$$

   mit $\omega_0 > 0$. Es soll der Einfluß einer zeitabhängigen Störung

   $$\hat{V}(t) = \hbar\lambda \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

   untersucht werden, wobei λ und ω reell sind. Wir nehmen an, dass das System bei $t = 0$ im Grundzustand $|1\rangle$ ist, und wollen die Wahrscheinlichkeit $W_{1\to2}(t)$ berechnen, es nach der Zeit $t > 0$ im angeregten Zustand $|2\rangle$ zu finden. Dazu wird die Wellenfunktion nach den Basiszuständen entwickelt

   $$\psi(t) = c_1(t)e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + c_2(t)e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle,$$

   mit den Anfangsbedingungen $c_1(0) = 1$ und $c_2(0) = 0$.

   a) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass aus der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung die gekoppelten Differentialgleichungen

   $$\begin{aligned} i\dot{c_1}(t) &= \lambda e^{i(\omega-\omega_0)t} c_2(t), \\ i\dot{c_2}(t) &= \lambda e^{-i(\omega-\omega_0)t} c_1(t), \end{aligned}$$

   folgen. Was sind E_1 und E_2?

   b) (12 Punkte) Lösen Sie diese gekoppelten Dierentialgleichungen unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen und zeigen Sie, dass die gesuchte Wahrscheinlichkeit $W_{1\to2}(t) = |c_2(t)|^2$ durch die Rabi-Formel

   $$W_{1\to2}(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + (\omega-\omega_0)^2/4} \sin^2\left(t\sqrt{\lambda^2 + (\omega-\omega_0)^2/4}\right)$$

   gegeben ist.

c) (6 Punkte) Berechnen Sie nun $W_{1\to 2}(t)$ in zeitabhängiger Störungstheorie erster Ordnung gemaß der in der Vorlesung hergeleiteten Formel

$$W^{(1)}_{1\to 2}(t) = \frac{1}{\hbar^2}\left|\int_0^t d\tau\ e^{i(E_2-E_1)\tau/\hbar}\langle\phi_2|V(\tau)|\phi_1\rangle\right|^2 .$$

Vergleichen Sie mit dem exakten Ergebnis aus b) fur kleine Werte von λ. Wann wird das störungstheoretische Ergebnis qualitativ falsch?

d) (6 Punkte) Bestimmen Sie den zeitabhängigen Mittlewert des Dipoloperators $\langle\hat{\mu}\rangle(t)$, wobei

$$\hat{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und μ_0 ist reell.