Theoretische Mechanik

Übungsblatt 5: Zwangskräfte, d'Alembert Prinzip und Lagrange 1. Art

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 21. Mai, 16:00 Uhr

1. Zwangsbedingungen und d'Alembert Prinzip (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß für k holonom skleronome Zwangsbedingungen $f_l(\vec{x})$, $l = 1, \cdots, k$, die Gradienten ∇f_l senkrecht auf der Bahnkurve des Teilchens stehen.

b) Für ein Teilchen, dessen Bewegung auf eine Ebene gezwungen ist, lautet eine geeignete Zwangsbedingung $f(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x} = 0$, wobei $\vec{a}$ ein Normalenvektor der Ebene ist. Warum ist $\tilde{f}(\vec{x}) = (\vec{a} \cdot \vec{x})^2 = 0$ keine geeignete Zwangsbedingung zur Lösung der Bewegungsgleichungen, obwohl $\tilde{f} = 0$ auch die Ebene fixiert?

c) Die eingeprägte Kraft sei durch ein Potential $V(\vec{x})$ gegeben. Das Teilchen unterliege einer holonom rheonomen Zwangsbedingung $f(\vec{x}, t) = 0$. Zeigen Sie, daß die Änderung der Gesamtenergie durch

$$\frac{dE}{dt} = -\lambda(\vec{x}(t), t) \left. \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} \right|_{\vec{x} = \vec{x}(t)}$$

gegeben ist, wobei $\vec{F}'(\vec{x}(t), t) = \lambda(\vec{x}(t), t) \nabla f(\vec{x}, t)$ die Zwangskraft ist und $\lambda(\vec{x}(t), t)$ der Lagrange-Multiplikator.

d) Zeigen Sie, daß aus den Lagrange-Gleichungen erster Art für eine holonome Zwangsbedingung $f(\vec{x}, t) = 0$ die Gleichung

$$(m\ddot{\vec{x}} - \vec{F}) \cdot \vec{\xi} = 0$$

folgt, wobei $\vec{\xi}$ ein beliebiger Vektor aus dem Tangentialraum der durch die Zwangsbedingung gegebenen Mannigfaltigkeit ist.

2. Skiläufer (8 Punkte)

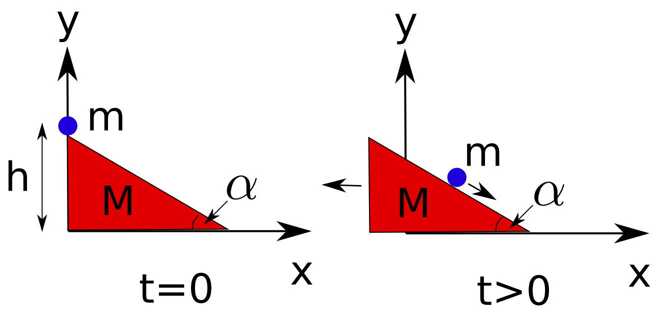
Ein Skiläufer fährt reibungsfrei eine Piste hinab, deren Querschnitt durch $y = \sqrt{2\beta x}$, $\beta > 0$ gegeben ist (skleronome Zwangsbedingung). Er startet am Punkt (x_0, y_0) aus dem Stillstand. An welchem Punkt (x_e, y_e) verläßt er (ohne zu springen) die Piste? Wählen Sie speziell $x_0 = 98$ m, $y_0 = 28$ m, $\beta = 4$ m. Der Energiesatz ist nützlich!

3. Rotierende Perle (8 Punkte)

Eine Perle gleite reibungsfrei auf einer Stange, die mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihren Anfangspunkt rotiert (rheonome Zwangsbedingung). Bestimmen Sie die Zwangskraft und die Bahnkurve.

4. Gleitender Keil (12 Punkte)

Eine Kugel bewege sich reibungsfrei auf einem Keil, der seinerseits reibungsfrei entlang der x-Achse gleiten kann, siehe Abb.



(Dies ist wiederum eine rheonome Zwangsbedingung.) Die Koordinaten der Kugel seien $x(t)$, $y(t)$, die des Keils $X(t)$. Die Anfangsbedingungen seien $x(0) = X(0) = 0$, $y(0) = h$, sowie $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{X}(0) = 0$.

a) Nutzen Sie Lagrange 1. Art, um die Bahnkurven von Kugel und Keil sowie die durch die Zwangsbedingung gegebene Zwangskraft zu bestimmen.

b) Überprüfen Sie die erhaltenen Bewegungsgleichungen mittels der Euler-Lagrange Gleichungen (Lagrange 2. Art).