Quantenmechanik I

Übungsblatt 5: Der harmonische Oszillator und kohärente Zustände

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 23. Mai, 13:00 Uhr

1. **Harmonischer Oszillator** (15 Punkte)

   Wir betrachten den eindimensionalen harmonischen Oszillator, beschrieben durch den Hamiltonoperator

   $$H = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \text{ mit } [\hat{p}, \hat{x}] = -i\hbar.$$

   Die Energieeigenwerte $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ und die zugehörigen stationären Zustände $|n>$ sind aus der Vorlesung bekannt.

   a) Zeige, daß die "Oszillatorlänge" $\alpha = \sqrt{\hbar/m\omega}$ den klassisch erlaubten Aufenthaltsbereich des Oszillators im Grundzustand angibt, also $E_0 \lesseqgtr V(x)$ für $|x| \lesseqgtr \alpha$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man den Oszillator im Grundzustand außerhalb des klassisch erlaubten Bereichs an?

   b) Der Oszillator sei durch eine unendlich hohe Potentialwand bei $x = 0$ daran gehindert, in das Gebiet $x < 0$ einzudringen. Im Halbraum $x > 0$ gelte das unveränderte Oszillatorpotential. Was sind die Energieeigenwerte und die stationären Zustände dieses Systems?

   c) Im folgenden betrachten wir wieder das ursprüngliche Oszillatorproblem (ohne die Wand bei $x = 0$). Mit den Auf- und Absteigeroperatoren,

   $$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\alpha} + \frac{i\alpha\hat{p}}{\hbar}\right)$$

   und

   $$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hat{x}}{\alpha} - \frac{i\alpha\hat{p}}{\hbar}\right),$$

   kann der Hamiltonoperator als

   $$H = \hbar\omega\left(b^\dagger b + \frac{1}{2}\right)$$

   geschrieben werden. Drücken Sie zuerst $\hat{x}$ und $\hat{p}$ durch b, $b^\dagger$ aus und berechnen Sie dann die Orts- und Impulsschwankung Δx, Δp

im Zustand $|n\rangle$.
Zur Erinnerung: Es gilt

$$H|n>= E_n, \text{ mit } E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),$$

und $b^\dagger|n>= \sqrt{n+1}|n+1>, b|n>= \sqrt{n}|n-1>$.

d) Wir wollen nun die Zeitabhängigkeit der Mittelwerte und Schwankungsquadrate von Ort und Impuls in einem beliebigen (i.a. nichtstationären) Zustand $|\psi>$ untersuchen. Leiten Sie dazu zunächst die Kommutatorregeln

$$[\hat{x},\hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p} \qquad [\hat{x}^2,\hat{p}] = 2i\hbar\hat{x} \qquad [\hat{x}^2,\hat{p}^2] = 2i\hbar(\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p})$$

und

$$[\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p},\hat{p}^2] = 4i\hbar\hat{p}^2 \qquad [\hat{p}\hat{x}+\hat{x}\hat{p},\hat{x}^2] = 4i\hbar\hat{x}^2$$

her und beweisen Sie damit, daß für folgende Kombinationen der Schwankungsquadrate

$$\Delta^\pm \equiv \frac{1}{2m}(\Delta p)^2 \pm \frac{m\omega^2}{2}(\Delta x)^2$$

gilt

$$\frac{d}{dt}\Delta^+ = 0, \qquad \frac{d^2}{dt^2}\Delta^- = -4\omega^2\Delta^-.$$

e) Betrachte speziell das Wellenpaket aus Aufgabe 2, 2. Übungsblatt:

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma_0^2} + ip_0x\right]$$

(p_0, x_0, σ_0 reelle Parameter) als Anfangszustand des harmonischen Oszillators zum Zeitpunkt $t = 0$. Dieses Wellenpaket ist 'miminal' in dem Sinne, daß das Produkt von Orts- und Impulsschwankung $\Delta x\Delta p$ den kleinstmöglichen quantenmechanisch erlaubten Wert (nämlich $\frac{\hbar}{2}$) annimmt.
Zeige: Das Wellenpaket bleibt im Laufe der zeitlichen Entwicklung minimal dann und nur dann, wenn $2\sigma_0^2 = \alpha^2$ gilt. Was läßt sich im Alternativfall sagen?

2. Kohärente Zustände (15 Punkte) Wir definieren den Operator K durch

$$K(\chi) = e^{\chi b^\dagger - \chi^* b},$$

wobei χ ein komplexer Parameter ist. $b^\dagger$ und b sind dabei die Auf- und Absteigeoperatoren.

a) Zeigen Sie, daß K ein unitärer Operator ist. Zeigen Sie weiterhin, daß die sogenannten kohärenten Zustände $|\chi\rangle = K(\chi)|0\rangle$ mit $b|0\rangle = 0$ auch als

$$|\chi\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\chi|^2} e^{\chi b^\dagger}|0> .$$

geschrieben werden können. Benutzen Sie dabei die Regel

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^A\mathrm{e}^B\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[A,B]},$$

falls $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$ ist.

b) Zeige, daß $|\chi>$ normierter Eigenzustand zu b mit Eigenwert χ ist.
Hinweis: Benutze die Operatorrelation $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$, die für eine beliebige Funktion f gilt, die Stammfunktion von f' ist, sofern $[A, [A, B]] = 0$ ist.

c) Beweise folgende Entwicklung von $|\chi>$ nach den stationären Zuständen $|n>$ des Oszillators

$$|\chi >= e^{-\frac{1}{2}|\chi|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\chi^n}{\sqrt{n!}} |n> .$$

Welches ist demnach die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Energieeigenwerte?
Hinweis: Berechnen Sie hierzu $\langle n|\chi\rangle$.

d) Berechne die Erwartungswerte und Schwankungsquadrate von Energie, Ort und Impuls im Zustand $|\chi\rangle$. Was fällt bei den Orts- und Impuls-Schwankungsquadraten auf? Wie groß ist $(\Delta x)^2(\Delta p)^2$?