

Vielteilchentheorie WS 13/14

Aufgabenblatt 4

J. Sirker und P. Korell

Freitag, 20.12.13

1. Teilchendichten und Ströme

- i) Drücken Sie die Teilchendichte $\rho(x) = \langle c^\dagger(x)c(x) \rangle$ für ein System freier fermionischer Teilchen bei Temperatur $T = 0$ durch eine geeignete Greensche Funktion aus!
- ii) Berechnen Sie unter Benutzung der für dieses System schon bekannten Greenschen Funktion die Teilchendichte $\rho(x)$.
- iii) Die Zustandsdichte ist definiert durch

$$\rho(\epsilon) = \sum_k \delta(\epsilon - \epsilon_k), \quad (1)$$

wobei $\{\epsilon_k\}$ die diskreten Energieniveaus sind. Drücken Sie die Zustandsdichte durch die retardierte Greensche Funktion aus! Berechnen Sie die Zustandsdichte für ein freies fermionisches System unter der Annahme, daß die Energieniveaus dicht sind (Übergang zum Integral).

- iv) In der Quantenmechanik ist die Stromdichte definiert durch

$$I = \frac{ie\hbar}{2m} [\psi(x)\partial_x\psi^*(x) - \psi^*(x)\partial_x\psi(x)]. \quad (2)$$

Wie läßt sich dieser Strom durch eine Greensche Funktionen ausdrücken?

2. Dielektrische Funktion

Eine Dichte-Dichte Korrelationsfunktion sei durch

$$C^+(\mathbf{q}, \omega) = \langle n(\mathbf{q}, \omega)n(-\mathbf{q}, -\omega) \rangle. \quad (3)$$

definiert. Hierbei ist $n(\mathbf{q}, \omega)$ die Elektronendichte im Impuls-Frequenzraum. Die dielektrische Funktion kann dann als

$$\frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} = 1 - \frac{V_0(\mathbf{q})}{L^d} C^+(\mathbf{q}, \omega). \quad (4)$$

geschrieben werden. V_0 ist dabei die Coulomb-Wechselwirkung und L^d die Systemgröße. Die dielektrische Funktion mißt das Verhältnis zwischen dem Potential, das auf eine Testladung im Medium und dem Potential, das auf eine Testladung im Vakuum wirkt. Die Anwesenheit anderer Elektronen schirmt das Coulombpotential ab ('Screening').

Benutzen Sie die Kramers-Kronig Relation um zu zeigen, daß

$$\Re \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega)} = 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\omega' \Im \frac{1}{\epsilon(\mathbf{q}, \omega')} \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}. \quad (5)$$

gilt.

Hinweis: Beachte die Eigenschaften der dielektrischen Funktion und der Konsequenzen für die Fouriertransformierte.