Theoretische Mechanik

Übungsblatt 4: Euler-Lagrange Gleichungen und Keplerproblem

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 14. Mai, 16:00 Uhr

1. **Federpendel** (10 Punkte)

   Ein Massepunkt mit Masse m bewege sich im homogenen Schwerefeld $-g\vec{e}_y$ in der x-y Ebene. Er sei an einer Feder (Federkonstante k, Federmasse vernachlässigbar) angebracht, die am oberen Ende fixiert ist. Die Länge der Feder in Ruhelage (ohne Masse m) sei r_0, es gelte das Hookesche Gesetz.

   a) Wie lauten die Lagrangefunktion und die Euler-Lagrange Gleichungen des Problems?

   b) Geben Sie für den Fall kleiner Auslenkungen sowohl in radialer als auch in azimutaler Richtung eine Näherungslösung an.

2. **Teilchen auf rotierender Ebene** (10 Punkte)

   In einem Inertialsystem (kartesische Koordinaten x, y, z) dreht sich die x-z Ebene mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Auf der Ebene befindet sich ein Massenpunkt m im homogenen Schwerefeld $-g\vec{e}_z$. Stellen Sie die Lagrangefunktion in Zylinderkoordinaten z, ρ, ϕ auf, bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen bei $t = 0$: $z = z_0$, $\rho = \rho_0$, $\dot{\rho} = v_0$ und $\dot{z} = 0$.

   Diskutieren Sie die Fälle a) $v_0 > 0$, b) $v_0 = 0$, c) $-\omega\rho_0 < v_0 < 0$, d) $v_0 = -\omega\rho_0$ und e) $v_0 < -\omega v_0$.

3. Keplerproblem (15 Punkte)

Zwei näherungsweise punktförmige Planeten mit Massen m_1 und m_2 wechselwirken über das Gravitationspotential $V = -k/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ mit $k = Gm_1m_2$ konstant.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten an und lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Schwerpunktsbewegung.

b) Schreiben Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für die Relativkoordinaten in zweidimensionalen Polarkoordinaten r, φ. Warum ist das für dieses dreidimensionale Problem möglich? Die Koordinate φ ist zyklisch - woran erkennt man das? Integrieren Sie die Bewegungsgleichung für den zu φ konjugierten Impuls und setzen Sie die Lösung in die Lagrangefunktion ein.

c) Die Gesamtenergie $E = T + V$ ist erhalten - warum? Nutzen Sie die Relation $T + V = E$, um eine Bewegungsgleichung der Form $\int dt = \int f(r)dr$ für $r(t)$ zu erhalten.

d) Wir sind nur an der Form der Planetenbahnen $r(\varphi)$ nicht aber an ihrem zeitlichen Ablauf $r(t)$ interessiert. Nutzen Sie das Ergebnis des Aufgabenteils b) ($d\varphi/dt = \ldots$), um die Bewegungsgleichung in die Form $\int d\varphi = \int \tilde{f}(r)dr$ zu transformieren.

e) Lösen sie die Bewegungsgleichung mittels der Substitution $u = 1/r$ und der Stammfunktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arccos\left[-\frac{b + 2ax}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right] + C \qquad (1)$$

f) Diskutieren Sie die Form der Trajektorien für die Fälle $\epsilon > 1$, $\epsilon = 1$, $0 < \epsilon < 1$, und $\epsilon = 0$.