Quantenmechanik I

Übungsblatt 4: Galilei-Transformationen und eindimensionale Potentiale

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 16. Mai, 13:00 Uhr

1. Galilei-Transformationen und die Schrödinger-Gleichung (6 Punkte)

Betrachten Sie die zwei Koordinatensysteme

$$
\begin{array}{llll}
K & \text{charakterisiert durch} & x & \text{und} \quad t \\
K' & \text{charakterisiert durch} & x' = x - vt & \text{und} \quad t = t'
\end{array}
$$

a) Es sei $\Psi(x,t)$ eine Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t)$$

in K und $\tilde{\Psi}(x',t')$ eine Lösung der entsprechenden Schrödinger-Gleichung in K'. Die Wahrscheinlichkeitsdichte muß unter dieser Galilei-Transformation invariant bleiben. Zeigen Sie also, daß

$$\tilde{\Psi}(x,t) = \mathrm{e}^{if(x,t)}\Psi(x,t)$$

und bestimmen Sie die Phase $f(x,t)$.

b) Zeigen Sie für eine de Broglie-Welle, daß unter Galilei-Transformation

$$p_x = p'_x + mv$$

gilt. Was bedeutet dies für die de Broglie-Wellenlänge?

2. Gebundene Zustände im δ-Potential (10 Punkte)

Wir lassen den Potentialtopf aus Aufgabe 3d) auf dem letzten Übungsblatt sehr schmall und tief werden, $a \to 0$, $V_0 \to \infty$ und halten dabei den Wert $\int dx\ V(x) = -V_0 a \equiv -W$ konstant. Im Grenzfall führt dies auf das δ-Potential $V(x) = -W\delta(x)$.

a) Begründe anhand der Ergebnisse zu Aufgabe 3d) auf dem letzten Übungsblatt, daß es im eindimensionalen δ-Potential genau einen gebundenen Zustand mit der Energie

$$E_0 = -\frac{m}{2\hbar^2}V_0^2 a^2$$

gibt.

b) Die Wellenfunktion $\Psi_0(x)$ und den Energieeigenwert E_0 des gebundenen Zustands kann man auch auf direktem Weg finden: Für $x \neq 0$ muss die Wellenfunktion die Form $\Psi_0(x) \sim \exp\{-k|x|\}$ mit

$$E_0 = -\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

haben. Ferner muss bei $x = 0$ gelten

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\Psi'(\epsilon) - \Psi'(-\epsilon)\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Psi_0''(x)\, dx$$

$$= \frac{2m}{\hbar^2} \lim_{\epsilon \to 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(V(x) - E\right) \Psi_0(x)\, dx = -\frac{2mW}{\hbar^2} \Psi_0(0).$$

Die Singularität des Potentials $V(x)$ bei $x = 0$ bedingt also einen Sprung der Ableitung der Wellenfunktion an dieser Stelle. Die Wellenfunktion selbst hingegen ist stetig. Berechne auf diese Weise E_0 und vergleiche mit dem Ergebnis aus a).

c) Bestimme die Eigenwerte von gebundenen Zuständen im Potential

$$V(x) = -W\left[\delta(x - a/2) + \delta(x + a/2)\right]$$

Unter welchen Bedingungen gibt es mehr als einen gebundenen Zustand? Wie ändern sich die Energien der gebundenen Zustände bei Änderung des Abstandes a der beiden Potentialsenken?
Hinweis: Suche mit dem Ansatz

$$\Psi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{kx} & \text{für} \quad x < -\frac{a}{2} \\ A\left(\mathrm{e}^{kx} \pm \mathrm{e}^{-kx}\right) & \text{für} \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ \pm \mathrm{e}^{-kx} & \text{für} \quad x > \frac{a}{2} \end{cases}$$

nach (unormierten) geraden und ungeraden Zuständen und bestimme A und k wie in b).

d) Berechne analog zur Vorlesung den Transmissionskoeffizienten für die Streuung sowohl am einfachen, als auch am doppelten δ-Potential. Diskutiere den Einfluß des Vorzeichens von W sowie die Resonanzen bei bestimmten Werten (welchen?) von a.

3. Tunneleffekt an Potentialschwellen (14 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m und der Energie $E > 0$ trifft auf die eindimensionale Potentialschwelle ($0 \leq V_3 \leq V_2$)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ V_2 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ V_3 & \text{für} \quad a < x \end{cases}$$

a) Skizziere die Potentialschwelle und gib die allgemeine Lösung der stationären Schrödinger Gleichung in den drei Bereichen 1 ($x < 0$), 2 ($0 \leq x \leq a$) und 3 ($a < x$) an.
Hinweis: Wähle als Ansatz für jeden der drei Bereiche die Überlagerung aus einer nach links laufenden und einer nach rechts laufenden Welle.

b) Welche Anschlussbedingungen muss die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung an den Stellen $x = 0$ und $x = a$ erfüllen? Leite daraus Bestimmungsgleichungen für die Amplituden der Teilwellen in den drei Bereichen her.

c) Betrachte im Folgenden eine von links einlaufende ebene Welle. Wie wird dadurch der allgemeine Ansatz aus Teilaufgabe a) im Bereich 3 modifiziert?

Berechne den Quotienten A_1/A_3 aus der Amplitude A_1 der von links einlaufenden Welle und der Amplitude A_3 der nach rechts auslaufenden Welle. Drücken Sie dazu sukszessive die Amplituden der Teilwellen in den Bereichen 2 und 1 durch die des Bereichs 3 aus.

d) Der Transmissionskoeffizient T ist definiert als der Quotient zwischen der auslaufenden und der einlaufenden Stromdichte, also

$$T = \frac{k_3|A_3|^2}{k_1|A_1|^2}.$$

k_j, $j \in \{1, 3\}$ ist die reele Wellenzahl im Bereich j.

Berechne damit den Transmissionskoeffizienten T für die beiden Fälle $V_2 < E$ und $V_3 < E < V_2$.

Hinweis: Benutzen Sie hierzu das Ergebnis aus Teilaufgabe c), das sich in der Form

$$\frac{A_1}{A_3} = \frac{\mathrm{e}^{ik_3a}}{2k_1k_2}\left(k_2\left(k_1 + k_3\right)\cos(k_2a) - i\left(k_2^2 + k_1k_3\right)\sin(k_2a)\right)$$

schreiben läßt. k_2 ist die Wellenzahl im Bereich 2 und kann auch rein imaginär sein

Hinweis: Es gilt:

$$\cos(ix) = \cosh x, \quad \sin(ix) = i\sinh x.$$

e) Was ergibt sich für T im Energieintervall $V_3 < E < V_2$ für die Grenzfälle $a \to 0$ und $a \to \infty$? Diskutiere das Ergebnis.

f) Was folgt für T im Grenzfall $E \to V_3$ und wie ist das Ergebnis zu interpretieren? Was erwartet man für den Transmissionskoeffizienten T im Energiebereich $0 < E < V_3$?