Quantenmechanik II

Übungsblatt 3: Greensche Funktion und Bornsche Näherung

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

Fällig: Montag 14. November, 13:00 Uhr

1. **Greensche Funktion** (10 Punkte)

   In der Vorlesung hatten wir die Ortsdarstellung der Greenschen Funktion angegeben:

   $$G_k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{2m}{\hbar^2} \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{q}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{k^2 - q^2 + i\tilde{\delta}}$$

   Berechnen Sie explizit das Integral, um das Resultat (I.D.10) der Vorlesung

   $$G_k(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

   zu erhalten. Das Integral kann per Residuensatz berechnet werden.

2. **Bornsche Näherung** (20 Punkte)

   a) Notwendige Bedingung für die Anwendbarkeit der Bornschen Näherung ist, daß der V-lineare Term der Bornschen Reihe klein ist gegenüber der ungestörten ebenen Welle:

   $$\left| \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \frac{e^{ik.|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} V(\boldsymbol{r}')\varphi_k(\boldsymbol{r}') \right| \ll |\varphi_k(\boldsymbol{r})| \text{ mit } \varphi_k(\boldsymbol{r}') = \frac{e^{i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}'}}{(2\pi)^{3/2}}.$$

   Speziell für ein zentralsymmetrisches Potential, $V(\boldsymbol{r}') = V(r')$, das seinen größten Wert bei $r = 0$ annimmt, fordern wir

   $$\frac{m}{2\pi\hbar^2} \left| \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \frac{e^{ik.r + i\boldsymbol{k}.\boldsymbol{r}}}{r} V(r) \right| \ll 1.$$

   Führe darin die Winkelintegration allgemein aus (wie auf Übungsblatt 2) und berechne den verbleibenden Ausdruck für die zwei Fälle

   $$\text{(i) } V(r) = V_0 e^{-r/r_0} \qquad \text{and} \qquad \text{(ii) } V(r) = V_0 \frac{r_0}{r} e^{-r/r_0}.$$

   Die Konstanten V_0 und $r_0 > 0$ bezeichnen die Stärke und die Reichweite des Streupotentials. *Hinweis: Im Fall (ii) tritt das Integral $I(y) = \int_0^\infty \mathrm{d}x e^{-x}(e^{2iyx} - 1)/x$ auf. Es ist durch $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} I(y)$ und integrieren über y lösbar. Für reelles y kann ferner $|I(y)|$ vereinfacht werden.*

   b) Berechne für die in a) genannten Potentiale den differentiellen und den totalen Streuquerschnitt in erster Bornscher Näherung.