Theoretische Mechanik

Übungsblatt 3: Variationsprobleme und Euler-Lagrange Gleichungen

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 7. Mai, 16:00 Uhr

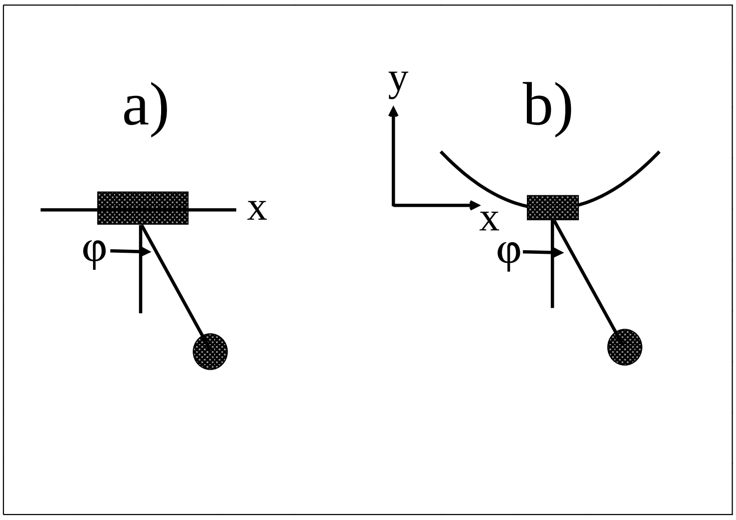
1. **Variationsproblem I: Kürzester Weg auf dem Zylinder** (8 Punkte)

   Wir wollen den Mantel eines Zylinders mit Radius R und Höhe H betrachten. Dieser sei durch $x^2 + y^2 = R^2$ und $z \in [0, H]$ beschrieben. Stellen Sie analog zum Beispiel in der Vorlesung das Funktional für die Länge eines beliebigen Weges zwischen zwei Punkten A und B auf dem Zylindermantel auf und minimieren Sie dieses. Die Parametrisierung soll dabei so gewählt sein, daß man bei $t = 0$ bei A startet und bei $t = 1$ bei B endet. Hilfreich ist die Einführung eines Winkels ϕ durch $x = R\cos\phi$ und $y = R\sin\phi$. Der Weg ist dann durch die beiden Koordinaten $\phi(t)$ und $z(t)$ beschrieben.

2. **Variationsproblem II: Flexibles Seil im Schwerefeld** (15 Punkte)

   Ein flexibles Seil der Länge L mit konstanter Massendichte μ sei zwischen zwei Pfosten gespannt. Diese sollen sich in einem $x - y$ Koordinatensystem bei $x = -a/2$ und $x = a/2$ befinden, wobei die Seillänge natürlich größer als der Abstand zwischen den Pfosten sein muß ($L > a$). Die Aufhängepunkte des Seiles befinden sich bei $y = 0$; entlang der y-Achse wirke die Schwerkraft auf das Seil. Finden Sie die Form des Seils im Schwerefeld, indem Sie das Funktional für die potentielle Energie des Seils aufstellen und dieses minimieren. Die Nebenbedingung der festen Seillänge L muß dabei durch einen Lagrange-Multiplikator berücksichtigt werden.

3. Bewegliches Pendel (12 Punkte)



a) Ein Pendel der Masse m_2 sei an einem Aufhängepunkt mit Masse m_1 befestigt, der sich frei entlang einer horizontalen Geraden bewegen kann. Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Euler-Lagrangegleichungen für geeignete generalisierte Koordinaten auf und lösen Sie diese für kleine Schwingungen des Pendels, $\varphi \ll 1$.

b) Ein Pendel der Masse m_2 sei an einem Aufhängepunkt mit Masse m_1 befestigt, der sich frei entlang einer Parabel $y = ax^2$ bewegen kann. Stellen Sie die Lagrangefunktion und die Euler-Lagrangegleichungen für geeignete generalisierte Koordinaten auf. Betrachten Sie insbesondere den Limes $a \to 0$ der Euler-Lagrangegleichungen.

4. Drehimpulserhaltung (5 Punkte)

Zeigen Sie, daß in einem abgeschlossenen N-Teilchensystem der Gesamtdrehimpuls $\vec{L}$ erhalten ist (siehe Satz M.I.C.6 der Vorlesung).