Vielteilchentheorie WS 13/14

Aufgabenblatt 2

J. Sirker und P. Korell

Freitag, 22.11.13

1. Bogoliubov Transformation

i) Wir betrachten Bosonen a und $a^\dagger$, die die bosonischen Kommutatorrelationen erfüllen. Ferner sei eine Transformation auf neue Operatoren b, $b^\dagger$ gegeben durch

$$b = ua + va^\dagger \text{ und} \tag{1}$$

$$b^\dagger = ua^\dagger + va. \tag{2}$$

Welche Bedingungen muss man an u, v stellen, damit auch die neuen Operatoren bosonische Kommutatorrelationen erfüllen?

ii) Nutzen Sie i), um den Hamiltonoperator

$$H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{\Delta}{2}(a^\dagger a^\dagger + aa). \tag{3}$$

in die diagonale Form

$$H = \tilde{\omega}(b^\dagger b + \frac{1}{2}). \tag{4}$$

zu bringen. Geben Sie u, v sowie $\tilde{\omega}$ als Funktion von ω und Δ an! Gibt es Einschränkungen an die Werte von ω und Δ? Was passiert für $\omega = \Delta$?

2. Grundzustand und kohärente Zustände

Der Grundzustand von Gleichung (3) kann als

$$|\tilde{0}\rangle = e^{-\alpha a^\dagger a^\dagger}|0\rangle \tag{5}$$

geschrieben werden und besteht aus gepaarten Bosonen. Finden Sie α als Funktion von u, v!

Hinweis: Der Grundzustand kann ausgehend von Gleichung (4) gefunden werden, da in diesen Operatoren $b|\tilde{0}\rangle = 0$ gilt. Unter Verwendung von $b|\tilde{0}\rangle = (ua+va^\dagger)|\tilde{0}\rangle = 0$ und Gleichung (5) kann man dann eine Gleichung für α finden.