Quantenmechanik II

Übungsblatt 2: Sphärischer Potentialtopf

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

Fällig: Montag 7. November, 13:00 Uhr

1. Sphärischer Potentialtopf (20 Punkte)

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m im radialsymmetrischen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & (r < a) \qquad \text{“hard core”} \\ -V_0 & (a < r < R) \\ 0 & (r > R). \end{cases}$$

a) Formuliere die Bestimmungsgleichung für die Streuphasen sowie für die Energien gebundener Zustände. Betrachte insbesondere den Fall $l = 0$.

b) Wie tief muß ein Potentialtopf vom Radius $R = 1.2$f (1f=10^{-13}cm) und ohne hard core sein, damit er (mit der geeigneten Masse m) genau einen gebundenen Zustand mit der Bindungsenergie des Deuterons, $E_0 = -2.23$MeV, liefert?

c) Die *Streulänge* a ist durch $\lim_{k\to 0} \sigma_{\text{tot}} = 4\pi a^2$ mit dem totalen Streuquerschnitt σ_{tot} verbunden. Drücken Sie die Streulänge für s-Wellen durch die Streuamplitude δ_0 aus!

d) Wie groß sind die Streulänge und der gesamte Niederenergiestreuquerschnitt für den in Aufgabenteil b) betrachteten Fall?
Wie ändern sich die berechneten Werte, wenn der Potentialtopf noch einen hard core vom Radius 0.2f enthält?

2. Streuung am Yukawapotential (20 Punkte) Wir beginnen mit der Lippmann-Schwinger Gleichung in der Form

$$\psi_k(\boldsymbol{r}) = \phi_k(\boldsymbol{r}) - \frac{2m}{\hbar^2}\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\, \frac{e^{i\boldsymbol{k}.(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} V(\boldsymbol{r}')\psi_k(\boldsymbol{r}'),$$

wobei $\phi_k(\boldsymbol{r})$ die einlaufende ebene Welle ist.

a) Für $|\boldsymbol{r}| \gg |\boldsymbol{r}'|$ können wir die Gleichung als

$$\psi_k(\boldsymbol{r}) = \phi_k(\boldsymbol{r}) + \frac{e^{ikr}}{(2\pi)^{3/2}} f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'),$$

mit $k' = k\hat{\boldsymbol{r}}$, schreiben. Wie schon in der Vorlesung gezeigt, kann man nun $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ ablesen. Vollziehen Sie diese Schritte noch einmal nach und geben Sie $f(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}')$ an!

b) Wir nehmen jetzt ein kugelsymmetrisches Potential $V(\boldsymbol{r}') = V(r')$ an. Drücken Sie die ebene Welle und die Streuwelle in einem geeigneten Basissystem (s. Vorlesung) aus und führen Sie die Winkelintegration für $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ explizit durch! Wie lautet dann die Partialwellenamplitude f_l? Aus $\delta_l \approx k f_l$ (warum gilt diese Beziehung?) erhalten Sie dann die Bornsche Näherung für die Streuamplitude δ_l der Partialwelle l.

c) Wir betrachten nun das sog. Yukawapotential ($\mu > 0$)

$$V(\boldsymbol{r}) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}.$$

Die einfachste Form der Bornschen Näherung erhalten wir, wenn wir in $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ aus a) die Streuwelle $\Psi_k(\boldsymbol{r}')$ durch die ebene Welle $\phi_k(\boldsymbol{r}') = \exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}')/(2\pi)^{3/2}$ ersetzen. Berechnen Sie in dieser Näherung $f(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}')$ bzw. $f(\theta)$. Benutzen Sie für den letzten Schritt die Beziehung $(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')^2 = (2k \sin\theta/2)^2$.

d) Wie sieht in dieser Näherung der differentielle Streuquerschnitt aus? Was folgt für $\mu \to 0$?