Theoretische Mechanik

Übungsblatt 2: Galilei Transformationen und Drehmatrizen

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 30. April, 16:00 Uhr

1. **Galilei Transformationen** (15 Punkte)

   a) Ein Massenpunkt m bewege sich unter dem Einfluß einer Potentialkraft $\vec{F} = -\nabla V$ mit dem Potential $V(\vec{r}, t) = |\vec{r}| + A\cos(kx - \omega t)$. Berechnen Sie die Kraft $\vec{F}$. Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ unter der Galilei Transformation $x' = x - v_0 t$, $y' = y$, $z' = z$, $t' = t$ mit $v_0 = \text{const.}$ forminvariant ist. Bestimmen Sie die Kraft in dem neuen Koordinatensystem. Wie lautet die Beziehung zur Kraft im alten Koordinatensystem?

   b) In einem Inertialsystem K breite sich eine Welle aus, die der Wellengleichung
   $$\Box u(\vec{r}, t) = 0$$
   genügt, wobei
   $$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$
   der d'Alembert Operator ist und c eine Geschwindigkeit. Betrachten Sie die Galilei Transformation $K \to K'$:
   $$x' = x - v_0 t,\ y' = y,\ z' = z,\ t' = t$$
   mit $v_0 = \text{const.}$ Wie lautet die Wellengleichung im Koordinatensystem K'? Unter welcher Bedingung ist die Wellengleichung näherungsweise forminvariant?

2. **Drehmatrizen** (7 Punkte)

   Zeigen Sie, daß bei einer Drehung um einen infinitesimalen Winkel ϕ um die x-,y-, oder z-Achse - beschrieben durch die Drehmatrix $R_x(\phi)$, $R_y(\phi)$, $R_z(\phi)$ - die folgende Beziehung erfüllt ist:
   $$R_x(\phi)R_y(\phi) - R_y(\phi)R_x(\phi) = R_z(\phi^2) - \mathbb{I}_3 + \mathcal{O}(\phi^3).$$
   Hinweis: Entwickeln Sie die Drehmatrizen jeweils bis zur Ordnung ϕ^2. Die obige Relation ist nur korrekt bis zu dieser Ordnung. Höhere Ordnungen, symbolisch $\mathcal{O}(\phi^3)$, sollen ignoriert werden.

3. Bewegungsgleichung (12 Punkte)

Ein Ende eines ideal elastischen und unbegrenzt dehnbaren Fadens sei an einer Wand befestigt. In dem Augenblick als eine Ameise sich von der Wand aus auf dem Faden mit der konstanten Geschwindigkeit v in Bewegung setzt, beginnt jemand am anderen Ende am Faden mit der konstanten Geschwindigkeit $W \gg v$ zu ziehen. Kann die Ameise bei stets konstanter Geschwindigkeit v relativ zum Faden das andere Ende erreichen?

4. Kurzaufgaben (6 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß für eine Zentralkraft mit $\vec{F} = f(r)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ die Rotation verschwindet.

b) Gegeben sei $\vec{F}(x,y) = (-y,x)$. Berechnen Sie die Arbeit längs eines Kreisbogens, der von $(x,y) = (1,0)$ nach $(0,1)$ führt.