Quantenmechanik I

Übungsblatt 2:
Kommutatoren und das Gaußpaket

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 2. Mai, 13:00 Uhr

1. Impuls und Position (10 Punkte)

a) Auf dem ersten Übungsblatt haben wir den *Kommutator*

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{1}$$

kennengelernt. Wie lautet der Kommutator wenn wir für A die Position $\hat{\mathbf{r}}$ und für B den Impuls $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ verwenden?

Hinweis: Da $\hat{\mathbf{r}}$ und $\hat{\mathbf{p}}$ Operatoren sind, sollte man streng genommen mit $[\hat{\mathbf{r}}_i, \hat{\mathbf{p}}_j]\psi(\mathbf{r}, t)$ rechnen. $\psi(\mathbf{r}, t)$ ist eine allgemeine Wellenfunktion.

b) Im Folgenden wollen wir einen Verschiebungsoperator in einer Dimension definieren. Zeige, daß

$$e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}\psi(x) = \psi(x+a) \tag{2}$$

gilt. D.h., der Operator $\hat{O} = e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}$ beschreibt eine Verschiebung der Wellenfunktion ψ um a.

Hinweis: Entwickle die Exponentialfunktion in eine Taylorreihe.

c) Berechnen Sie $[\hat{O}, \hat{x}]$ sowie

d) $e^{\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}\hat{x}e^{-\frac{ia}{\hbar}\hat{p}}$. In beiden Fällen sind die auf dem ersten Übungsblatt gezeigten Relationen hilfreich.

2. Das Gaußpaket (20 Punkte)

Wir wollen nun zur Aufgabe 3 des ersten Übungsblattes zurückkehren. Der dort eingeführten Notation folgend, betrachten wir das durch

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4\sigma_0^2} + ik_0x\right]$$

definierte "Gaußpaket". σ_0 und k_0 sind reelle Parameter. Wir werden sehen, daß σ_0 die (anfängliche) Breite des Gaußpakets angibt und $\hbar k_0$ den Impuls.

a) Berechne $\tilde{\Psi}(k)$ und damit $\Psi(x,t)$ für das Gaußpaket. Das "Gaußintegral" hat den Wert

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \mathrm{e}^{-\lambda(x-x_0)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \quad \text{für} \quad x_0 \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,\lambda \geq 0,$$

für beliebiges (komplexes) x_0 und positiven Realteil von λ. Verwende in $\Psi(x,t)$ die Größe

$$\tau \equiv \frac{2m\sigma_0^2}{\hbar}$$

als eine für das Wellenpaket der (anfänglichen) Breite σ_0 charakteristische Zeit. Wie groß ist τ für ein Elektron beziehungsweise für eine Schrotkugel?

b) Zeige, daß die Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho = \left|\Psi(x,t)\right|^2$ des Gaußpakets die Form

$$\rho = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{(x-v_0t)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \quad \text{mit} \quad \sigma^2 \equiv \sigma_0^2\left(1+\frac{t^2}{\tau^2}\right), \quad v_0 \equiv \left.\frac{\partial\omega}{\partial k}\right|_{k_0} = \frac{\hbar k_0}{m}$$

annimmt und diskutiere das Ergebnis.

c) Berechne für das Gaußpaket den Orts- und den Impulsmittelwert

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Psi^* x \Psi = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \rho x \quad \text{und} \quad \langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \Psi^* \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi$$

und vergleiche das Ergebnis mit b).

d) Berechne die Schwankungsquadrate von Ort und Impuls im Gaußpaket, also die Größen

$$(\Delta x)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\left(x-\langle x\rangle\right)^2 \Psi\ dx$$

$$(\Delta p)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}-\langle p\rangle\right)^2 \Psi\ dx$$

e) Berechne die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $j = \frac{\hbar}{2im}(\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x} - \frac{\partial\Psi^*}{\partial x}\Psi)$ des Gaußpakets.

f) Mit $\Psi(x,t)$ ist auch $\Phi(x,t) = \Psi^*(x,-t) = \Psi(-x,t)$ Lösung der Schrödingergleichung. Welche physikalische Bedeutung hat diese zusätzliche Lösung?