Vielteilchentheorie WS 13/14

Aufgabenblatt 1

J. Sirker und P. Korell

Freitag, 8.11.13

1. Jordan-Wigner Transformation

Wir betrachten in einer Dimension eine Kette, die aus Spin-1/2 Operatoren $\vec{S}_j$ bzw. aus fermionischen Operatoren $c_j^{(\dagger)}$ besteht, wobei j den Gitterplatz bezeichne. Die Jordan-Wigner Transformation ist dann durch

$$S_j^z \to n_j - 1/2, \quad S_j^+ \to (-1)^j c_j^\dagger \mathrm{e}^{i\pi\phi_j}, \quad S_j^- \to (-1)^j c_j \mathrm{e}^{-i\pi\phi_j}$$

gegeben, wobei $n_j = c_j^\dagger c_j$ und $\phi_j = \sum_{l=1}^{j-1} n_l$.

a) Zeigen Sie, daß die c_j eine Antikommutatoralgebra erfüllen wenn die Spins einer Drehimpulsalgebra genügen.

b) Wie kann man eine solche Transformation in höheren Dimensionen definieren?

2. Anyonen in einer Dimension

In einer Dimension kann man Anyonen nicht mehr im Rahmen von Wellenfunktionen und dem Vertauschen von Teilchen entlang von Pfaden definieren. Eine mögliche Alternative ist eine algebraische Definition mittels der folgenden Vertauschungsrelationen

$$a_j a_k^\dagger - \mathrm{e}^{-i\theta \mathrm{sgn}(j-k)} a_k^\dagger a_j = \delta_{jk}, \quad a_j a_k - \mathrm{e}^{i\theta \mathrm{sgn}(j-k)} a_k a_j = 0 \qquad (1)$$

wobei θ ein beliebiger Winkel ist.

a) Welche Art von Vertauschungsrelationen erhält man für $\theta = 0$?

b) Welche für $\theta = \pi$?

Wir wollen nun eine verallgemeinerte Jordan-Wigner Transformation betrachten mit

$$a_j = b_j \exp\left(-i\theta \sum_{k=1}^{j-1} n_k\right)$$

wobei $n_k = a_k^\dagger a_k = b_k^\dagger b_k$ der Teilchenzahloperator ist.

c) Zeigen Sie, daß die Operatoren a den anyonischen Vertauschungsrelationen (1) genügen, wenn die Teilchen vom Typ b Bosonen sind, d.h. $[b_i, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$ und $[b_i, b_j] = 0$.