Quantenmechanik II

Übungsblatt 11: Pfadintegrale

JProf. J. Sirker und Dr. N. Sedlmayr

Fällig: Montag 30. Januar, 13:00 Uhr

1. **Harmonischer Oszillator** (30 Punkte)
   Wir betrachten den Hamiltonoperator für den harmonischen Oszillator:
   $$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2.$$
   a) Begründen Sie, warum das Feynmansche Pfadintegral für den harmonischen Oszillator durch
   $$\langle q_f | e^{-iHt/\hbar} | q_i \rangle = \int_{q(0)=q_i}^{q(t)=q_f} Dq\, e^{iS[q]/\hbar},\ S[q] = \int_0^t \mathrm{d}t' \frac{m}{2}\left[(\partial_{t'} q)^2 - \omega^2 q^2\right]$$
   gegeben ist.

   b) Wie im Vortrag für das freie Teilchen gezeigt, wollen wir nun wieder eine Entwicklung um die klassische Lösung vornehmen mit $q(t') = q_{kl}(t') + r(t')$. Dabei bezeichnet $r(t')$ die Quantenfluktuationen und die klassische Lösung ist durch $\partial_{t'}^2 q_{kl} + \omega^2 q_{kl}^2 = 0$ definiert. Zeigen Sie, daß man wieder $S[q] = S_{kl}[q_{cl}] + S[r]$ schreiben kann. Benutzen Sie $\partial_{t'}^2 q_{kl} + \omega^2 q_{kl}^2 = 0$ mit den gegebenen Randbedingungen, um $S_{kl}[q_{kl}]$ zu finden. Wie lauten die Randbedingungen für $r(t')$?

   c) Berechnen Sie nun den Beitrag der Quantenfluktuationen
   $$\int Dr e^{iS[r]/\hbar}$$
   unter Benutzung von
   $$\int Dr e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}t' r(t')\hat{A} r(t')} \propto \left[Det(\hat{A})\right]^{-\frac{1}{2}}$$
   normalisiert mit der $\omega = 0$ Lösung. Wie lautet das endgültige Resultat
   $$\langle q_f | e^{-iHt/\hbar} | q_i \rangle = \frac{\langle q_f | e^{-iHt/\hbar} | q_i \rangle}{\langle r_f | e^{-iH(\omega=0)t/\hbar} | r_i \rangle} \underbrace{\langle r_f | e^{-iH(\omega=0)t/\hbar} | r_i \rangle}_{=\sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}}}?$$
   Beweisen Sie, daß der Limes $\omega \to 0$ die richtige Antwort gibt.
   Hinweis: Die Determinante kann durch das Produkt der Eigenwerte,

$-m[\partial_{t'}^2 + \omega^2] r_n = \epsilon_n r_n$ mit den gegebenen Randbedingungen, ersetzt werden. Dann kann man den Limes in der Zerlegung des Zeitintervalls $N \to \infty$ nehmen wobei $x/sinx = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - x^2/(n\pi)^2)^{-1}$.

c) Was ist der Grund für die Singularitäten bei $t = n\pi/\omega$?

d) Die Zeitentwicklung eines Wellenpakets ist gegeben durch

$$\psi(q_f, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q_i \langle q_f | e^{-iHt/\hbar} | q_i \rangle \psi(q_i, 0).$$

Beweisen Sie, daß ein Gaußsches Wellenpaket

$$\psi(q_i, 0) = (2\pi a)^{-1/4} e^{-q_i^2/4a}$$

für alle Zeiten seine Form beibehält.