

Theoretische Elektrodynamik

Übungsblatt 11: Eichtransformationen, Multipole und Vektorpotentiale

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 9. Juli, 16:00 Uhr

- 1. Eichtransformationen** (8 Punkte) Betrachten Sie eine allgemeine Eichtransformation der elektromagnetischen Potentiale,

$$\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \chi$$

- Wie muß χ gewählt werden, damit die Lorentzbedingung gilt? Sind die Potentiale dann eindeutig?
- Wie muß χ bei der Coulombbedingung gewählt werden? Sind die Potentiale eindeutig?
- Betrachten Sie die axiale Eichung $A_z = 0$. Wie muß χ gewählt werden, damit dies gilt? Wie sehen dann die inhomogenen Maxwellgleichungen (für die Potentiale) aus?
- Wie muß in der Eichung $\text{div } \vec{A} = 0$ und $\Phi = 0$ die Funktion χ gewählt werden? Ist dies immer möglich?

- 2. Multipolmomente einer Ladungsverteilung** (8 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Ladungsanordnung

(i) Vier Ladungen mit $q_{1/2} = \pm q$ bei $\vec{r}_{1/2} = \pm a \vec{e}_x$ und $q_{3/4} = \pm q$ bei $\vec{r}_{3/4} = \pm a \vec{e}_y$.

(ii) Drei Ladungen mit $q_{1/2} = q$ bei $\vec{r}_{1/2} = \pm a \vec{e}_z$ und $q_3 = -2q$ bei $\vec{r}_3 = \vec{0}$.

- Berechnen Sie in beiden Fällen das Dipol- und das Quadrupolmoment bezüglich des benutzten kartesischen Koordinatensystems I mit Koordinatenursprung bei $(0, 0, 0)$.
- Berechnen Sie nun in beiden Fällen das Dipol- und Quadrupolmoment bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems I' , dessen Koordinatenursprung bei $(a, 0, 0)$ bezüglich I liege.

3. Vektorpotential in der Magnetostatik (14 Punkte)

In einem magnetischen Medium sind die Stromdichte $\vec{j}_{\text{ext}}(\vec{r})$ und die Magnetisierung $\vec{M}(\vec{r})$ gegeben. Zeigen Sie, dass das Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}) = A_{\text{ext}}(\vec{r}) + \vec{A}_{\text{int}}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{j}_{\text{ext}}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

die makroskopische Maxwellgleichung

$$\text{rot } \vec{H} = \text{rot} (\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}) = \vec{j}_{\text{ext}}$$

erfüllt.

[Hinweis: Statik \rightarrow Zeitableitungen verschwinden; Randterme bei partieller Integration sollen ebenfalls verschwinden. Die Identität 1.(vi) vom 1. Übungsblatt ist nützlich. Denken Sie auch an die Definition der Greenschen Funktion für den Laplaceoperator!]

4. Magnetisierte Kugel (10 Punkte)

Bestimmen Sie das magnetische Feld \vec{B} einer Kugel mit homogener Magnetisierung \vec{M}_0 für $r \leq R$ wobei R der Radius ist. Ferner sei $\vec{j}_{\text{ext}} = 0$. Skizzieren Sie den Feldverlauf.

[Hinweis: Verwenden Sie das Vektorpotential aus Aufgabe 3.]