Quantenmechanik I

Übungsblatt 11: Ein geladenes Teilchen im Magnetfeld und Zweiniveausysteme

JProf. J. Sirker

Fällig: Dienstag 19. Juli, 13:00 Uhr

1. Geladenes Teilchen im Magnetfeld (12 Punkte)

Ein Teilchen der Masse M und der elektrischen Ladung q bewege sich in einem homogenen Magnetfeld in z-Richtung, $\vec{B} = (0, 0, B)$. Das Magnetfeld kann in verschiedenen Weisen über ein Vektorpotential $\vec{A}$ in den Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{1}{2M}(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A})^2$ eingehen. Wir betrachten hier 2 Fälle:

i) die asymmetrische Minimalform $\vec{A} = B(-y, 0, 0)$ und

ii) die symmetrische Eichung $\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \times \vec{r} = \frac{1}{2}B(-y, x, 0)$.

a) (6 Punkte) Im asymmetrischen Fall treten x und z im Hamiltonoperator $\hat{H}$ nicht auf; es kann deshalb p_x und p_y gemeinsam mit $\hat{H}$ diagonalisiert werden (ebene Wellen in x-und z-Richtung). Zeige, daß der verbleibende Hamiltonoperator einem (verschobenen) harmonischen Oszillator in y-Richtung entspricht und bestimme die Eigenwerte. Was ist über die Entartung der Eigenzustände zu sagen?

b) (6 Punkte) Im symmetrischen Fall kann nur eine ebene Welle in z-Richtung von der Lösung abgespalten werden. Zeige, daß der x, y-Anteil des Hamiltonoperators zwei harmonischen Oszillatoren entspricht, die durch einen Term $\propto L_z$ gekoppelt sind. Diese Kopplung ist jedoch trivial: ersetzt man die Leiteroperatoren b_x und b_y für die einzelnen Oszillatoren durch $c := \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x + ib_y)$, so erhält man wieder ein 1-d Oszillatorproblem.

Führe die notwendigen Schritte aus und diskutiere das Ergebnis. D.h. bestimmen Sie die Form des Hamiltonoperators abhängig von c und $c^\dagger$.

2. Spin 1/2 (12 Punkte)

Zur Drehimpulsquantenzahl $j = \frac{1}{2}$ gibt es nur $2j + 1 = 2$ linear unabhängige Zustände. Üblicherweise wählt man die Eigenzustände von s_z

mit der Notation $|\uparrow>$ und $|\downarrow>$ als Basis; der Spin steht in + oder − z-Richtung. Die Leiteroperatoren sind offenbar

$$|\uparrow><\downarrow| = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_x + i\boldsymbol{\sigma}_y) \text{ und } |\downarrow><\uparrow| = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_x - i\boldsymbol{\sigma}_y)\,;$$

der Faktor $\frac{1}{2}$ sorgt für die richtige Normierung, denn:

$$\begin{aligned} |\uparrow><\downarrow|\,|\downarrow><\uparrow| + |\downarrow><\uparrow|\,|\uparrow><\downarrow| &= |\uparrow><\uparrow| + |\downarrow><\downarrow| \\ &= \frac{1}{4}(\boldsymbol{\sigma}_+\boldsymbol{\sigma}_- + \boldsymbol{\sigma}_-\boldsymbol{\sigma}_+) = 1. \end{aligned}$$

In der s_z-Matrixdarstellung sind $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ die beiden Eigenzustände von $\boldsymbol{\sigma}_z = \frac{2\boldsymbol{s}_z}{\hbar} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

a) (3 Punkte) Was ist die physikalische Bedeutung der Zustände

$$\begin{aligned} |\rightarrow> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> + |\downarrow>)\,, & |\leftarrow> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> - |\downarrow>)\,, \\ |\nearrow> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> + i|\downarrow>)\,, & |\swarrow> &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow> - i|\downarrow>)\,; \end{aligned}$$

und der Operatoren

$$\begin{aligned} &|\uparrow><\uparrow| + |\downarrow><\downarrow|, && |\downarrow><\uparrow| + |\uparrow><\downarrow|, \\ &|\uparrow><\uparrow| - |\downarrow><\downarrow|, && i\,(|\downarrow><\uparrow| - |\uparrow><\downarrow|) \quad ? \end{aligned}$$

Wie lauten sie in der Matrixdarstellung?

b) (3 Punkte) Aus den in a) gebildeten normierten Zuständen können wir die Projektoren

$$|\leftarrow><\leftarrow|, \quad |\rightarrow><\rightarrow|, \quad |\nearrow><\nearrow|, \quad |\swarrow><\swarrow|$$

bilden. Beweise und erläutere die Identitäten

$$|\leftarrow><\leftarrow| + |\rightarrow><\rightarrow| = \mathbf{1}, \quad |\nearrow><\nearrow| + |\swarrow><\swarrow| = \mathbf{1}.$$

Wie lauten sie in Matrixschreibweise?

c) (3 Punkte) Ein Spin-$\frac{1}{2}$ zeige in Richtung des Einheitsvektors $\vec{n} := (\sin(\vartheta)\cos(\varphi), \sin(\vartheta)\sin(\varphi), \cos(\vartheta))^T$ und ist damit Eigenzustand zu $\vec{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ mit Eigenwert +1. Wie lautet der Zustand explizit in der Matrixdarstellung? Wie lautet der Zustand des Spins in der Gegenrichtung?

d) (3 Punkte) Es wird die z-Komponente des in c) betrachten Spins gemessen. Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die beiden möglichen Meßwerte und ebenso für die x-Komponente.

3. Zweiniveausystem (6 Punkte)

Ein Zweiniveausystem habe (in Energiedarstellung) den Hamiltonoperator $\boldsymbol{H}_0 = \begin{pmatrix}\epsilon_1 & 0\\ 0 & \epsilon_2\end{pmatrix}$ mit $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Wir betrachten als "gestörtes" System $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{V}$ mit $\boldsymbol{V} = \lambda\begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{V}^\dagger = \boldsymbol{V}$, λ reell.

a) (2 Punkte) Berechne die Eigenwerte von $\boldsymbol{H}$ in zweiter störungstheoretischer Ordnung.

b) (4 Punkte) Berechne die Eigenwerte von $\boldsymbol{H}$ exakt. In welchem Grenzfall erhält man das Ergebnis aus a)?