Theoretische Elektrodynamik

Übungsblatt 10: Multipole und Dielektrika

Prof. J. Sirker

Fällig: Dienstag 2. Juli, 16:00 Uhr

1. Multipolentwicklung (10 Punkte)

Das Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

gegeben. Wir nehmen nun an, daß die Ladungsdichte nur in einem Bereich V von Null verschieden sei und wollen das Potential Φ in großer Entfernung $\vec{r}$ von diesem Bereich V betrachten. Es gilt also immer $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ falls das Integral einen Beitrag liefert.

a) Entwickeln Sie daher das Potential in r'/r und zeigen Sie, daß

$$4\pi\epsilon_0 \Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2}\sum_{ik} Q_{ik} \frac{x_i x_k}{r^5} + \cdots$$

mit $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ gilt, mit

$$\begin{aligned} Q &= \int d^3r \, \rho(\vec{r}) && \text{Gesamtladung,} \\ \vec{p} &= \int d^3r \, \vec{r}\rho(\vec{r}) && \text{Dipolmoment, und} \\ Q_{ik} &= \int d^3r \, (3x_i x_k - r^2\delta_{ik})\rho(\vec{r}) && \text{Quadrupolmoment.} \end{aligned}$$

b) Wie lautet das Quadrupolmoment einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung?

2. Elektrischer Dipol (10 Punkte)

Betrachten Sie einen Dipol am Punkt $\vec{r}_0$ mit Dipolmoment $\vec{p}$ und zu vernachlässigender Ausdehnung. Zeigen Sie, daß dieser bei der Berechnung

a) seines Potentials $\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r' \frac{\rho_{\text{eff}}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, sowie

b) seiner Energie $W = \int d^3r \rho_{\text{eff}}(\vec{r})\Phi(\vec{r})$

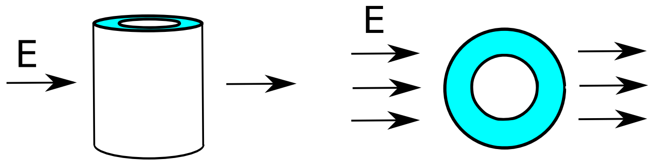
durch eine effektive Ladungsdichte

$$\rho_{\text{eff}}(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \nabla\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

beschrieben werden kann.
[Hinweis: partielle Integration, um die Ableitung von der Delta-Distribution auf die Funktion zu verschieben.]

3. **Dielektrischer Hohlzylinder** (20 Punkte)

Ein unendlich langer kreisförmiger Hohlzylinder mit dem inneren Radius R_1 und dem äußeren Radius R_2 befinde sich in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}$ mit der in der Skizze gegebenen Feldrichtung.



Der Bereich $R_1 \leq r \leq R_2$ sei mit einem Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ϵ gefüllt, der Bereich $r < R_1$ und $r > R_2$ sei leer ($\epsilon = 1$) und r werde von der Zylinderachse (Zylinderkoordinaten) aus gemessen. Für das zu bestimmende Potential wählen wir den zweidimensionalen Ansatz (der Zylinder ist unendlich lang)

$$\Phi(r, \varphi) = \alpha_0 + \beta_0 \log r + \sum_{m \geq 1}^{\infty} (\alpha_m r^m + \beta_m r^{-m}) \cos(m\varphi).$$

a) Bestimmen Sie unter Benutzung der Randbedingungen das Potential und das elektrische Feld in den drei oben definierten Raumbereichen.

b) Skizzieren Sie die elektrischen Feldlinien für den Fall $R_2 = 2R_1$.