Quantenmechanik I

Übungsblatt 10: Der Lenz-Runge Vektor

JProf. J. Sirker

Fällig: Montag 11. Juli, 13:00 Uhr

1. Lenzscher Vektor in der Quantenmechanik (30 Punkte)

In der klassischen Mechanik wird gezeigt, dass der Lenzsche Vektor

$$\vec{A}' = \vec{p} \times \vec{L} - \frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

für ein Potential der Form

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} \tag{2}$$

eine Konstante der Bewegung darstellt. Dies führt z.B. dazu, dass eine elliptische Planetenbahn im Gravitationspotential nicht präzediert. In der Quantenmechanik wird der Lenzsche Vektor zu einer zusätzlichen Erhaltungsgröße, die eine vollständige algebraische Lösung des Wasserstoffatoms erlaubt. Dies wurde schon 1925 und damit vor Entwicklung der Schrödingergleichung von Pauli benutzt, um das Wasserstoffspektrum zu berechnen. Soweit wollen wir hier nicht gehen und stattdessen nur einige Eigenschaften der quantenmechanischen Entsprechung dieser Größe diskutieren.

a) Zeigen Sie, dass $\vec{A}'$ bei direkter Quantisierung nicht hermitesch ist.

Für ein Teilchen in einem Coloumb Potential (wir wählen unsere Einheiten so, dass gilt $\alpha = m = \hbar = 1$, wobei m die Masse des Teilchens sei) betrachten wir im folgenden den hermiteschen Operator

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\left(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}\right) - \frac{\vec{r}}{r}. \tag{3}$$

b) Man zeige, dass $\vec{A}$ hermitesch und eine Erhaltungsgröße darstellt. Das bedeutet $[H, \vec{A}] = 0$ mit

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2} + V(r). \tag{4}$$

Warum ist $\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$? Zeigen Sie darüber hinaus, dass für die Vertauschung beliebiger Komponenten von $\vec{A}$ und $\vec{L}$ gilt:

$$[L_i, A_j] = i\epsilon_{ijk} A_k. \tag{5}$$

c) Definieren Sie den Operator $A_\pm = A_x \pm iA_y$ und berechnen Sie den Zustand $L_z A_+ \big|n,l,m\big\rangle$ sowie $L^2 A_+ \big|n,l,m\big\rangle$, wobei n, l und m jeweils die Haupt-, Neben-, und die magnetische Quantenzahl der Wellenfunktion bezeichnen sollen. Interpretieren Sie die Ergebnisse.

d) Aus dem bisher gezeigten kann man folgern, dass A_+ der folgenden Gleichung genügt:

$$A_+ \left|n,l,l\right\rangle = D^+_{l,l} \left|n,(l+1),(l+1)\right\rangle , \tag{6}$$

wobei $D^+_{l,l}$ eine reelle Zahl sei. Mit Hilfe von $A_\pm$ und $L_\pm$ kann man also sowohl in l als auch in m auf- und absteigen, was die algebraische Lösung des Problems ermöglicht. Beweisen Sie mit Hilfe dieser Relation die folgende Gleichung

$$\big\langle n,l,l \,\big| A_z^2 \big|\, n,l,l \big\rangle = \frac{(D^+_{l,l})^2}{2(l+1)}. \tag{7}$$

Beweisen Sie hierzu zuerst die Relation

$$A_z = -\frac{1}{2}\left(L_- A_+ + A_- L_+\right) - A_z L_z. \tag{8}$$

Zeigen Sie ferner, dass gilt

$$A_- A_+ = (2L^2 H + 2H + 1) - A_z^2 + 2L_z H. \tag{9}$$

Berechnen Sie hierzu zunächst A^2. Bestimmen Sie mit Gleichung (9) $(D^+_{l,l})^2$.

e) Bestimmen Sie in der Gleichung

$$A_- \left|n,l,-l\right\rangle = D^-_{l'l''} \left|n,l',l''\right\rangle \tag{10}$$

die Größen l', l'' und die reele Zahl $D^-_{l'l''}$.