Quantenmechanik I

Übungsblatt 1: Der Comptoneffekt, Operatoren, und Wellenfunktionen

JProf. J. Sirker

Fällig: Dienstag 26. April, 13:00 Uhr

1. **Der Comptoneffekt** (12 Punkte)

   Am Linearbeschleuniger in Stanford, USA, werden hochenergetische Photonen dadurch erzeugt, daß Photonen aus einem Laserstrahl mit hochenergetischen Elektronen zur frontalen Kollision gebracht werden. Welche Photonenergie kann auf diese Weise erreicht werden, wenn man von rotem Laserlicht ($\lambda_0 = 8 \cdot 10^{-7}$m) ausgeht und 20GeV Elektronen verwendet? Welchen Bruchteil seiner Energie gibt das Elektron bei dem Stoß ab?

   Hinweis: Verallgemeinere zunächst die in der Vorlesung angegebenen Formeln für Energie- und Impulserhaltung auf den Fall, daß das Elektron vor dem Stoß nicht in Ruhe ist. Es empfiehlt sich, mit dem (relativistischen) Impuls $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ und nicht mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Elektrons zu rechnen. Außerdem werden die Formel übersichtlicher, wenn wir sogenannte natürliche Einheiten verwenden, d.h. $c = \hbar = 1$ setzen. Dann ist die Ruhemasse des Elektrons $M_e \approx 0.511$MeV und 1MeV entspricht einer Lichtwellenlänge von $\approx 1 \cdot 10^{-12}$m.

2. **Rechnung mit Operatoren** (10 Punkte)

   In der Quantenmechanik haben wir es oft mit linearen Operatoren zu tun, die nicht vertauschbar sind. Wie Sie es z.B. vom Matrizenkalkül kennen, hängt das Ergebnis einer sukzessiven Anwendung zweier Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ im allgemeinen von deren Reihefolge ab. Anders ausgedrückt: Der Kommutator

   $$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{1}$$

   ist im allgemeinen verschieden vom Nulloperator.

   Wir wollen hier einige Regeln zusammenstellen, die die Berechnung von Operatorpotenzen sowie operatorwertiger Funktionen und damit gebildeten Kommutatoren sehr erleichtern.

   a) Begründe für Operatoren $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ und komplexe Zahlen α

   $$\begin{aligned} [\alpha\hat{A}, \hat{B}] &= \alpha[\hat{A}, \hat{B}], \qquad [\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \\ [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}. \end{aligned} \tag{2}$$

b) Falls $\hat{A}$ mit dem Kommutator $[\hat{A}, \hat{B}]$ vertauscht, also unter der Voraussetzung $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$, läßt sich $[\hat{A}^2, \hat{B}] = \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{A}$ vereinfachen zu $[\hat{A}^2, \hat{B}] = 2\hat{A}[\hat{A}, \hat{B}]$. Zeige durch Fortsetzung dieses Verfahrens (vollständige Induktion) zu höheren Potenzen, daß für ein operatorwertiges Polynom $p(\hat{A})$ gilt

$$[p(\hat{A}), \hat{B}] = p'(\hat{A})[\hat{A}, \hat{B}] \qquad \text{falls } [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0; \tag{3}$$

dabei ist $p'(x) = \frac{dp}{dx}$ die Ableitung von $p(x)$.

c) Indem wir das Polynom in b) als Teilsumme einer Potenzreihe in $\hat{A}$ auffassen, können wir (Konvergenz vorausgesetzt) die gefundene Kommutatorregel auch für differenzierbare Funktionen $f(\hat{A})$ anstelle von $p(\hat{A})$ verwenden. Beweise so

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] \qquad \text{falls } [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0. \tag{4}$$

3. Die Schrödingergleichung und die Wellenfunktion (8 Punkte)

Die Bewegung eines freien Teilchens der Masse m in einer Raumdimension wird durch eine Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ beschrieben, die sich als Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x, t) = 0 \tag{5}$$

(mit geeigneter Anfangsbedingung $\Psi(x, 0)$) ergibt. Wir setzen eine Wellenlösung der Form $\Psi_k(x, t) = e^{i(kx-\omega t)}$ an. Die Wellenzahl k und die Frequenz ω (beide reell) sind freie Parameter.

a) Zeige, daß Ψ_k die Schrödingergleichung erfüllt, sofern k und ω durch $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$ verknüpft sind.

b) Zur Zeit $t = 0$ sei die Wellenfunktion vorgegeben, $\Psi(x, 0) \equiv \Psi(x)$. Die Fouriertransformierte der anfänglichen Wellenfunktion sei

$$\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x e^{-ikx}\Psi(x). \tag{6}$$

Zeige, daß sich mit $\omega = \omega(k)$ aus a) die Wellenfunktion zur Zeit t schrieben läßt als

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k e^{i(kx-\omega t)}\tilde{\Psi}(k), \tag{7}$$

d.h. in dieser Form die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt.